Programação Linear

Mauricio Pereira dos Santos
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Editoração: O autor, criando arquivo texto no format LaTex.
Fluxos e figuras: Incluídos no texto como EPS (Encapsulated Postscript File).

090218

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Muitos colocam o desenvolvimento da Programação Linear (PL) como um dos avanços científicos mais importantes do século XX. Seu impacto desde 1950 tem sido extraordinário. Hoje em dia é uma ferramenta padrão que tem possibilitado grandes ganhos para a maioria das companhias nos países industrializados, sendo que seu uso em outros setores da sociedade vem crescendo rapidamente. Qual a natureza desta ferramenta e que tipo de problemas ela resolve ? Neste capítulo aprenderemos as respostas para estas 2 perguntas. Resumidamente, o tipo mais comum de aplicação envolve o problema de distribuir recursos limitados entre atividades que estão competindo por aquele recursos, da melhor maneira possível (isto é, da maneira ótima). Programação Linear usa um modelo matemático para descrever o problema . O termo linear significa que todas as funções matemáticas do modelo são, obrigatoriamente, funções lineares. A palavra programação não se refere a programação de computadores e deve ser vista como um sinônimo de planejamento. Assim, podemos definir a programação linear como sendo o planejamento de atividades para obter um resultado ótimo, isto é, um resultado que atenda, da melhor forma possível, a um determinado objetivo. Embora alocação de recursos para atividades seja o tipo mais comum, programação linear tem numerosos outros tipos de aplicação. De fato, qualquer problema cujo modelo matemático se enquadre na forma geral de um modelo de PL, é um problema de programação linear. Um procedimento extremamente eficiente, chamado método simplex, está disponível para resolver problemas de PL, mesmo aqueles com milhares de variáveis.

1.1 Exemplo

Para entender melhor os conceitos da Programação Linear, vamos trabalhar com um exemplo que servirá de base para apresentarmos alguns dos aspectos relacionados com os modelos de Programação Linear.
Uma empresa produz 2 produtos em uma de suas fábricas. Na fabricação dos 2 produtos, 3 insumos são críticos em termos de restringir o número de unidades dos 2 produtos que podem ser produzidas: as quantidades de matéria prima (tipos **A** e **B**) disponíveis e a mão de obra disponível para a produção dos 2 produtos.
Assim, o Departamento de Produção já sabe que, para o próximo mês, a fábrica terá disponível, para a fabricação dos 2 produtos, 4900 kilos da matéria prima **A** e 4500 kilos da matéria prima **B**.

Cada unidade do produto tipo I, para ser produzida consome 70 kilos da matéria prima **A** e 90 kilos da matéria prima **B**. Por sua vez, cada unidade do produto tipo II para ser produzida, utiliza 70 kilos da matéria prima tipo **A** e 50 kilos da matéria prima tipo **B**.
Como a produção dos 2 produtos utiliza processos diferentes, a mão de obra é especializada e diferente para cada tipo de produto, ou seja não se pode utilizar a mão de obra disponível para a fabricação de um dos produtos para produzir o outro. Assim, para a produção do produto tipo I a empresa terá disponível, no próximo mês, 80 homens-hora. Já para o produto tipo II terá 180 homens-hora. Cada unidade do produto tipo I, para ser produzida, utiliza 2 homens-hora enquanto que cada unidade do produto tipo II utiliza 3 homens-hora.
Reduzindo do preço unitário de venda todos os custos, chega-se a conclusão de que cada unidade do produto tipo I dá um lucro de $20 e cada unidade do produto tipo II dá um lucro de $60.
Dada a grande procura, estima-se que todas as unidades a serem produzidas, dos 2 produtos, poderão ser vendidas.
O objetivo da empresa é obter o maior lucro possível com a produção e a venda das unidades dos produtos tipo I e II.
Queremos resolver este problema com um modelo de Programação Linear.
Mas antes de fazer isto temos que conhecer o problema. Qual é o problema desta empresa ?
O problema é que eles não sabem quantas unidades de cada tipo de produto (I e II) devem ser produzidas, de maneira que o lucro seja o maior possível.
Para construir um modelo de P.Linear temos que começar identificando o que se deseja saber ou conhecer no problema. A isto dá-se o nome de **variável de decisão**. No nosso problema temos 2 variáveis de decisão que são:

$x_1 \Rightarrow$ nº de unidades do produto tipo I a serem produzidas no próximo mês.
$x_2 \Rightarrow$ nº de unidades do produto tipo II a serem produzidas no próximo mês [1].

Temos que identificar o objetivo que se deseja alcançar e traduzí-lo por uma função matemática linear contendo as variáveis de decisão. Assim, no nosso exemplo, o objetivo é maximizar o lucro total obtido com a produção dos 2 produtos. Cada unidade, a ser produzida, do produto tipo I dá um lucro de $20. Como vamos produzir x_1 unidades, teremos um lucro de $20x_1$. Da mesma forma, cada unidade do produto tipo II dá um lucro de $60, ou seja, pelo produto tipo II teremos um lucro de $60x_2$. Desta forma a função de lucro total, que queremos maximizar, será uma função da forma: $20x_1 + 60x_2$.
Esta função é chamada de **função objetivo** e é representada, pela maioria dos autores, como uma função de uma variável **Z** representando o sentido da otimização que, no nosso caso, é de maximização. Assim, podemos escrever:
(MAX)$Z = 20x_1 + 60x_2 \Rightarrow$ função objetivo.

[1] Chamamos de x_1 e x_2 mas poderíamos usar qualquer nome para rotular as variáveis de decisão

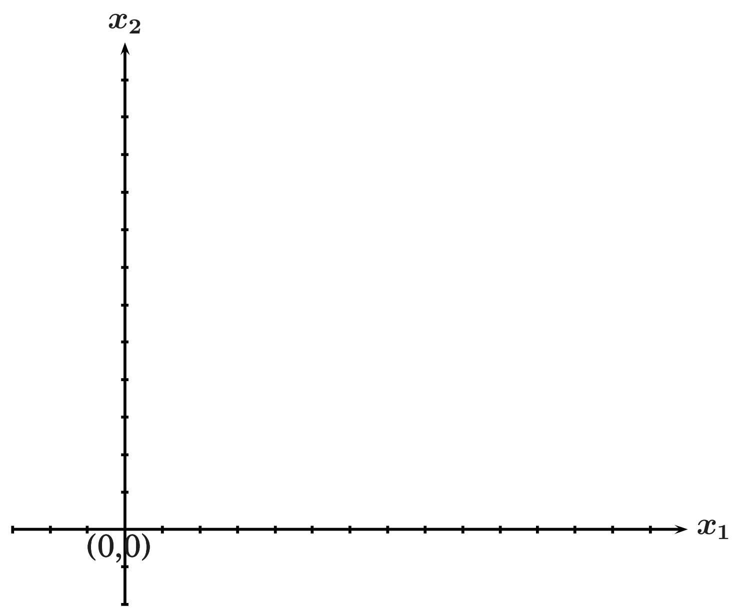
Evidentemente que o nosso modelo não se restringe a função objetivo pois se assim fosse, a solução seria simplesmente $x_1 = x_2 = \infty$, o que, sem muita análise, percebemos que é impossível bastando observar a quantidade disponível de qualquer uma das matérias primas. Desta forma os valores que x_1 e x_2 podem assumir estão condicionados pelas restrições do modelo que, no nosso exemplo, são as as quantidades das 2 matérias primas e a quantidade de mão de obra disponível. Temos que representar cada restrição física por uma função matemática linear contendo as variáveis de decisão do modelo. A 1ª restrição que temos diz que a quantidade disponível de matéria prima tipo A, no próximo mês é de 4900 kilos. Cada unidade a ser produzida do produto I vai consumir 70 kilos desta matéria prima. Por sua vez, cada unidade a ser produzida do produto II também vai consumir 70 kilos desta mesma matéria prima. Logo $70x_1 + 70x_2$ vai nos dar toda a matéria prima tipo A a ser utilizada. Esta quantidade não pode ser maior do que a empresa vai ter disponível, ou seja 4900 kilos. Podemos escrever então: $70x_1 + 70x_2 \leq 4900$
Fazendo-se o mesmo tipo de raciocínio para a matéria prima tipo B, podemos escrever: $90x_1 + 50x_2 \leq 4500$.
Temos ainda que representar a restrição relativa a mão de obra. Para a produção do produto tipo I, temos 80 homens-hora disponíveis. Cada unidade, para ser produzida, utiliza 2 homens-hora. Logo, $2x_1$ indica todo o consumo de mão de obra, apta para produzir o produto I, no próximo mês. Como temos disponíveis 80 homens-hora, a restrição fica: $2x_1 \leq 80$.
Podemos escrever uma restrição semelhante para o produto tipo II, ou seja: $3x_2 \leq 180$.
A primeira vista poderá parecer que formulamos todas as restrições. No entanto, há um tipo de restrição não tão evidente. Como visto anteriormente, x_1 e x_2 representam as unidades dos 2 tipos de produto a serem fabricadas. Ora não podemos produzir, por exemplo, –10 unidades do produto tipo I ou do produto tipo II, ou seja, x_1 e x_2 não podem ser negativos. Matematicamente temos: $x_1, x_2 \geq 0$
Podemos agora escrever todo o modelo de programação linear para o nosso exemplo:
(MAX) $Z = 20x_1 + 60x_2 \Rightarrow$ Função Objetivo

$$
\text{s.a} \quad
\left.\begin{array}{r}
70x_1 + 70x_2 \leq 4900 \\
90x_1 + 50x_2 \leq 4500 \\
2x_1 \leq 80 \\
3x_2 \leq 180
\end{array}\right\} \text{Restrições do modelo}
$$

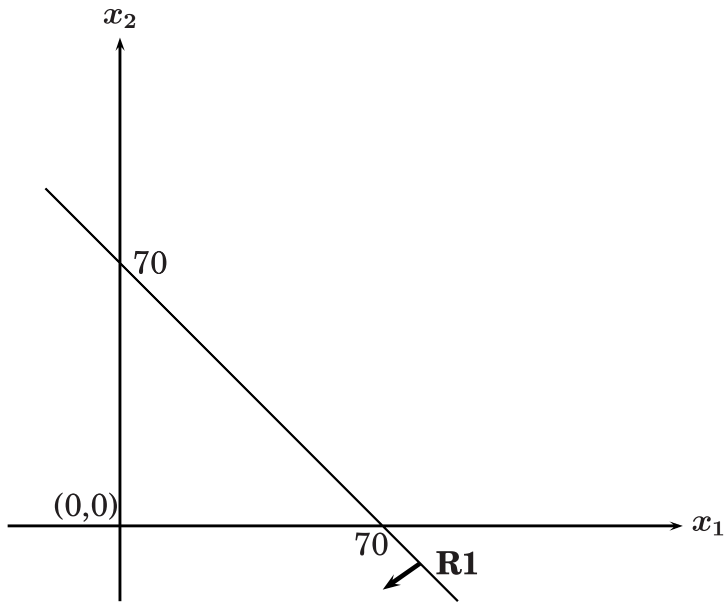
$$
x_1, x_2 \geq 0 \quad \} \text{ Restrição de não negatividade}
$$

1.2 Solução gráfica

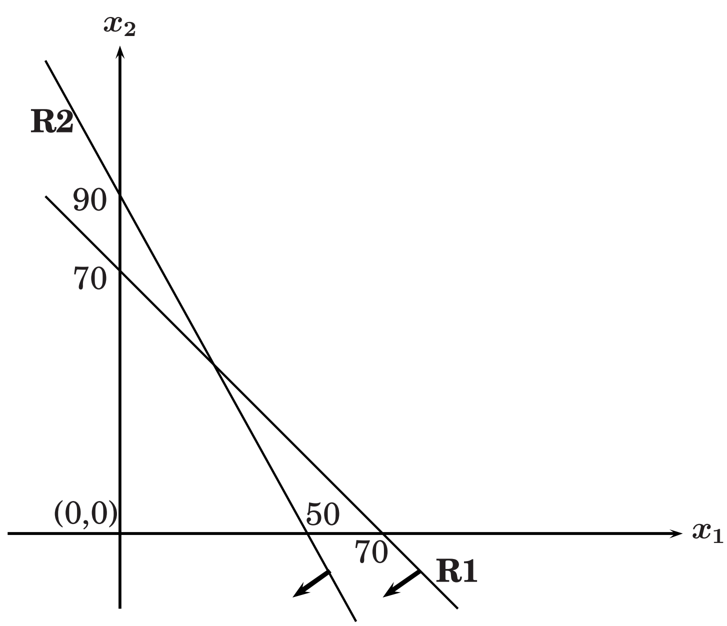
Modelos de P.Linear de até 3 variáveis podem ser resolvidos graficamente. Este tipo de solução não tem aplicação prática pois os problemas do mundo real tem sempre muito mais variáveis (dezenas, centenas e até milhares). No entanto a solução gráfica nos ajudará a entender os princípios básicos do método analítico, chamado de método Simplex, usado para resolver os modelos de P.Linear.
Vamos resolver o nosso exemplo graficamente:
Como x_1 e x_2 tem que ser $>= 0$, o ponto ótimo, ou seja o ponto que maximiza o valor de Z, obedecidas todas as restrições, só pode estar no $1^{\underline{o}}$ quadrante. Assim podemos traçar:



Vamos considerar a $1^{\underline{a}}$ restrição na igualdade, ou seja $70x_1 + 70x_2 = 4900$. Ela é uma equação de uma reta passando pelos pontos (70,0) e (0,70). Podemos então traçá-la em nosso gráfico:

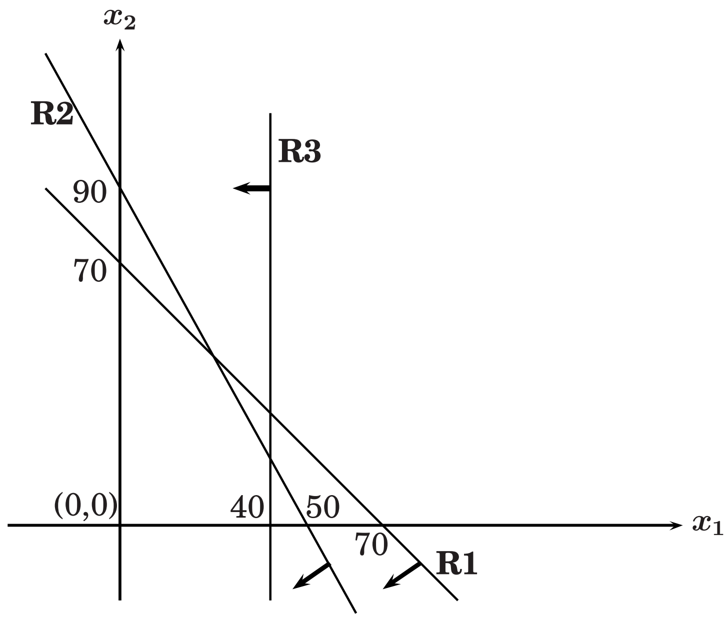


Como o ponto (0,0) está abaixo da reta e como (0,0) satisfaz a restrição, todos os pontos da reta para "baixo" são pontos que satisfazem a restrição.
Vamos fazer o mesmo com a 2ª restrição que na igualdade, $90x_1 + 50x_2 = 4500$ é uma reta que passa pelos pontos (50,0) e (0,90). Traçando-a temos:

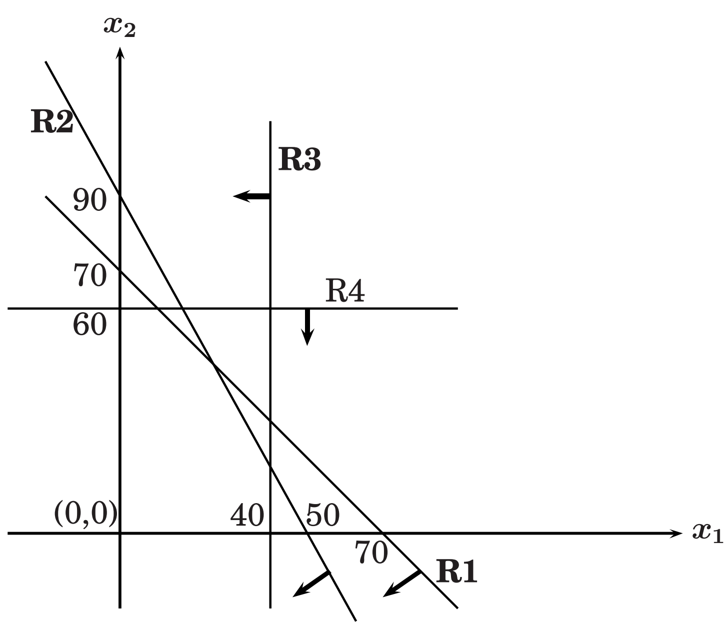


Como o ponto (0,0) está abaixo da reta e como (0,0) satisfaz a restrição, todos os pontos da reta para "baixo" são pontos que satisfazem a restrição.

A 3ª restrição, na igualdade ($2x_1 = 80$), é uma reta paralela ao eixo x_2 passando pelo ponto 40 em x_1. Temos então:

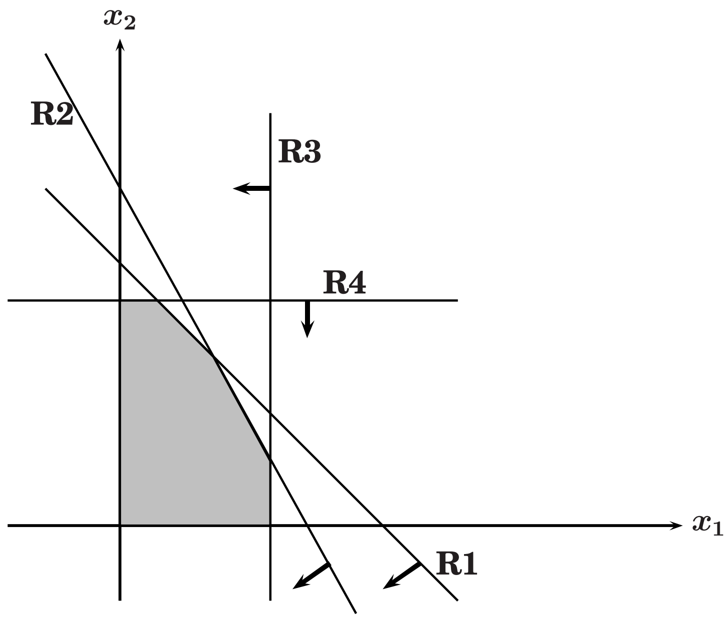


Como o ponto (0,0) está a esquerda da reta e obedece a restrição, todos os pontos da reta para a esquerda são pontos que satisfazem a 3ª restrição.
A 4ª restrição na igualdade, $3x_2 = 180$, é uma reta paralela ao eixo x_1, passando pelo ponto 60 no eixo x_2. Traçando-a, temos:

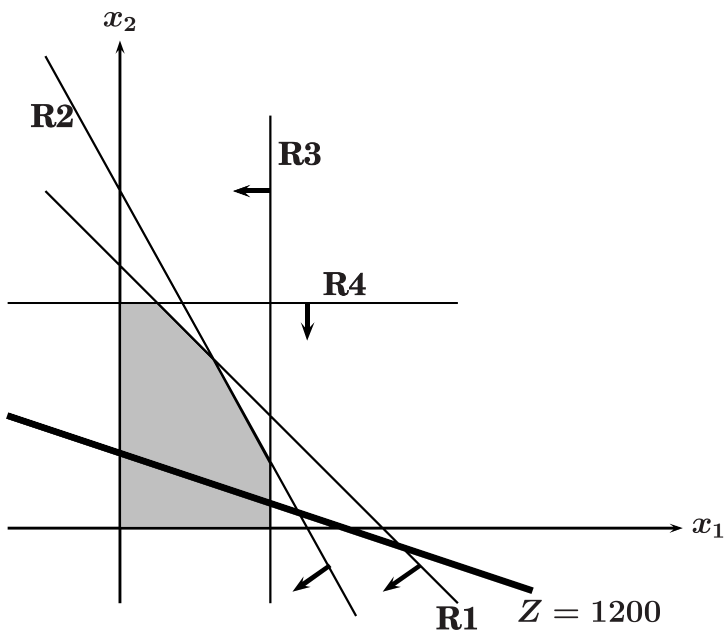


Como o ponto (0,0) está abaixo da reta e obedece a restrição, todos os pontos da reta para baixo são pontos que satisfazem a 4ª restrição.

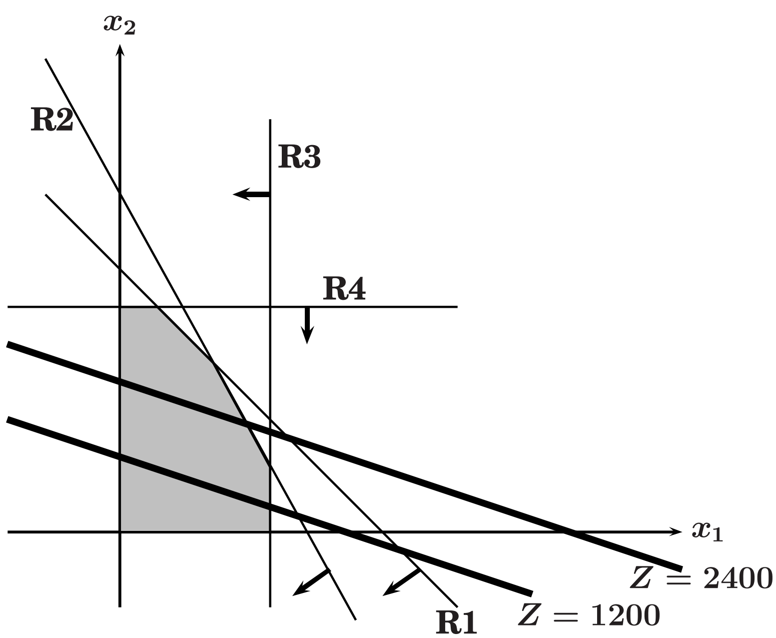
Como todas as restrições foram traçadas temos o chamado **Espaço Solução** que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo, ou seja, todos os pontos que "obedecem" a todas as restrições do modelo. No gráfico o **Espaço Solução** é o polígono hachurado, como podemos ver a seguir:



O ponto ótimo é um ponto do espaço solução, ou seja pertencente ao polígono hachurado. Como encontrá-lo graficamente ?
Vamos observar a função objetivo: $Z = 20x_1 + 60x_2$. Graficamente esta equação representa uma família de retas paralelas, ou seja, para cada valor de Z temos uma reta que será paralela a qualquer outra para outro valor de Z, inclusive para aquela com o valor ótimo de Z . Vamos, arbritariamente, escolher um valor para Z, por exemplo $Z = 1200$. Temos então uma reta passando pelos pontos (60,0) e (0,20). No gráfico temos:

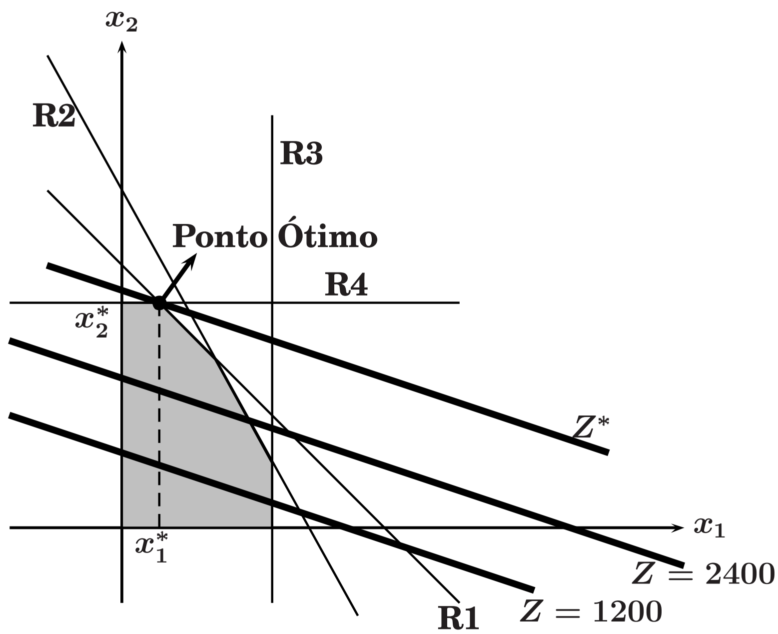


Como queremos maximizar o valor de Z, vamos escolher agora um valor maior, por exemplo $Z = 2400$, ou seja uma reta passando pelos pontos (120,0) e (0,40). Vamos ver como fica graficamente:



Como esperado, a nova reta $Z = 2400$ é uma reta paralela a reta anterior $Z = 1200$. Descobrimos também que traçando-se paralelas a $Z = 1200$, acima dela, obtemos valores maiores para Z. Como obter o ponto ótimo ?

Simplesmente traçando a paralela, mais "alta" possível, que toque, pelo menos, um ponto do espaço solução. Graficamente temos:



O "*" indica, em programação matemática o valor ótimo. Assim, x_1^* quer dizer o valor ótimo de x_1.
O ponto ótimo ter sido um dos vértices do espaço solução não é uma mera coincidência. Na verdade o ponto ótimo é sempre um dos vértices do espaço solução a não ser quando temos múltiplas (infinitas) soluções ótimas, pois neste caso, os pontos ótimos são todos os pertencentes a um dos lados do espaço solução. Para ilustrar este último caso, mude a função objetivo para (MAX) $Z = 90x_1 + 50x_2$. Resolva graficamente e observe que todos os pontos de um dos lados do espaço solução são pontos ótimos! Isto acontece porque a função objetivo é a uma função paralela a 2ª restrição.

1.3 Exercícios

A) Resolva graficamente o modelo abaixo:

$$(\text{MAX})\ Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a

(1) $x_1 \leq 4$

(2) $2x_2 \leq 12$

(3) $3x_1 + 2x_2 \leq 18$

(4) $x_1 \geq 0$

(5) $x_2 \geq 0$

Indique o espaço solução (hachurando), o ponto ótimo (apontando) e as restrições redundantes (pelo número).

B) Resolva graficamente o modelo abaixo:

$$(\text{MAX})\ Z = 2x_1 + x_2$$

s.a

(1) $x_2 \leq 10$

(2) $2x_1 + 5x_2 \leq 60$

(3) $x_1 + x_2 \leq 18$

(4) $3x_1 + x_2 \leq 44$

(5) $x_1 \geq 0$

(6) $x_2 \geq 0$

Indique o espaço solução (hachurando), o ponto ótimo (apontando) e as restrições redundantes (pelo número).

C) Resolva graficamente o modelo abaixo:

$$(\text{MAX})\ Z = -2x_1 - 2x_2$$

s.a

(1) $3x_1 - 4x_2 \leq 18$

(2) $8x_1 - 3x_2 \leq -24$

(3) $6x_1 + 8x_2 \leq 24$

(4) $3x_1 + 5x_2 \leq 21$

(5) $x_1 \leq 3$

(6) $x_2 \geq 0$

Indique o espaço solução (hachurando), o ponto ótimo (apontando) e as restrições redundantes (pelo número).

D) Resolva graficamente o modelo abaixo:

$$(\text{MAX})\ Z = -2x_1 - 8x_2$$

s.a

(1) $4x_1 + 2x_2 \geq -8$
(2) $-3x_1 + 6x_2 \geq -6$
(3) $-6x_1 + 6x_2 \leq 18$
(4) $x_2 \geq -2$
(5) $x_1 \leq 2$
(6) $5x_1 + 3x_2 \geq 15$
(7) $x_1 \geq 0$

Indique o espaço solução (hachurando), o ponto ótimo (apontando) e as restrições redundantes (pelo número).

E) Resolva graficamente o modelo abaixo:

$$(\text{MAX})\ Z = -4x_1 - 2x_2$$

s.a

(1) $x_1 + x_2 \leq 8$
(2) $8x_1 + 3x_2 \geq -24$
(3) $-6x_1 + 8x_2 \leq 48$
(4) $3x_1 + 5x_2 \geq 15$
(5) $x_1 \leq 4$
(6) $x_2 \geq 0$

Indique o espaço solução (hachurando), o ponto ótimo (apontando) e as restrições redundantes (pelo número).

F) Resolva graficamente o modelo abaixo:

$$(\text{MAX})\ Z = -2x_1 - 5x_2$$

s.a

(1) $2x_1 - 2x_2 \leq 10$
(2) $7x_1 + 3x_2 \geq -21$
(3) $-2x_1 + 3x_2 \geq -6$
(4) $3x_1 + 9x_2 \leq 27$
(5) $x_1 \geq -1$
(6) $x_2 \geq -4$

Indique o espaço solução (hachurando), o ponto ótimo (apontando) e as restrições redundantes (pelo número).

G) Resolva graficamente o modelo abaixo:

$$(\text{MIN})\ Z = -4x_1 - 2x_2$$

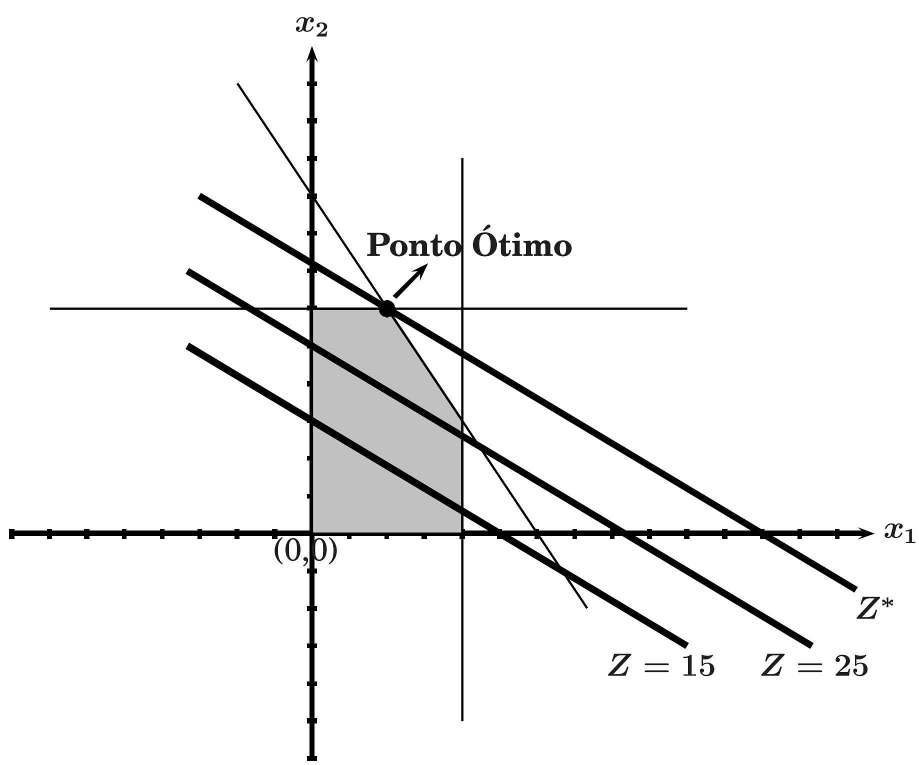
s.a

(1)	$x_1 + x_2 \leq 8$
(2)	$8x_1 + 3x_2 \geq -24$
(3)	$-6x_1 + 8x_2 \leq 48$
(4)	$3x_1 + 5x_2 \leq 15$
(5)	$x_1 \leq 3$
(6)	$x_2 \geq 0$

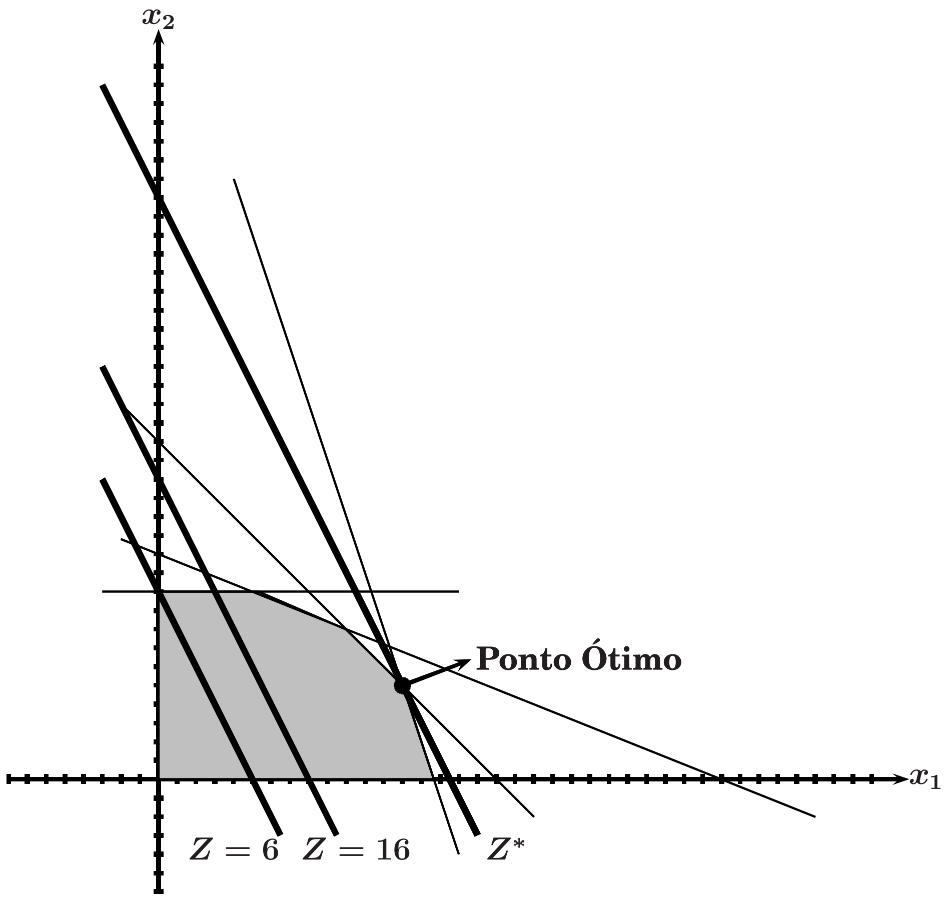
Indique o espaço solução (hachurando), o ponto ótimo (apontando) e as restrições redundantes (pelo número).

1.4 Respostas dos exercícios da seção 1.3

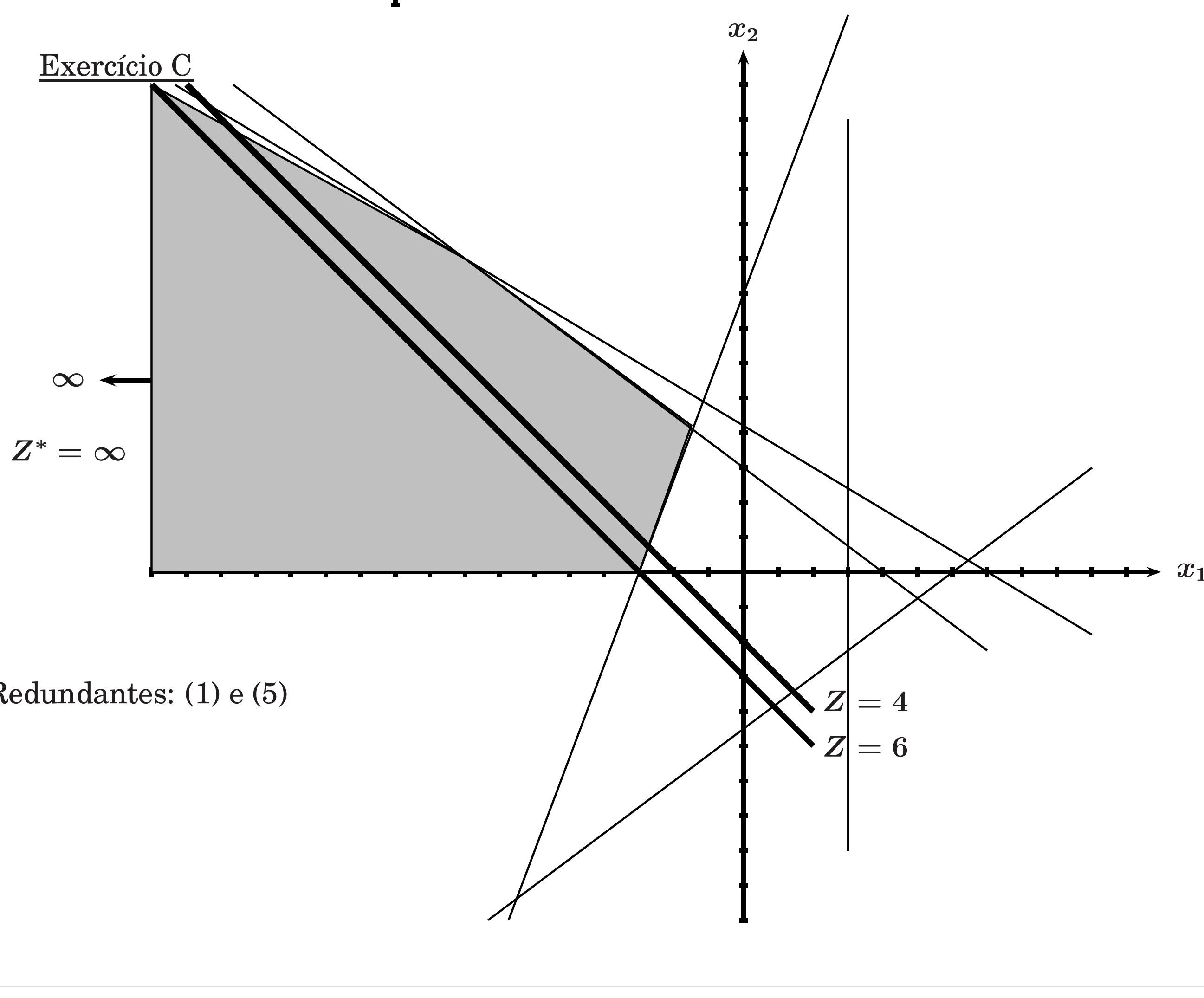
<u>Exercício A</u>



Exercício B

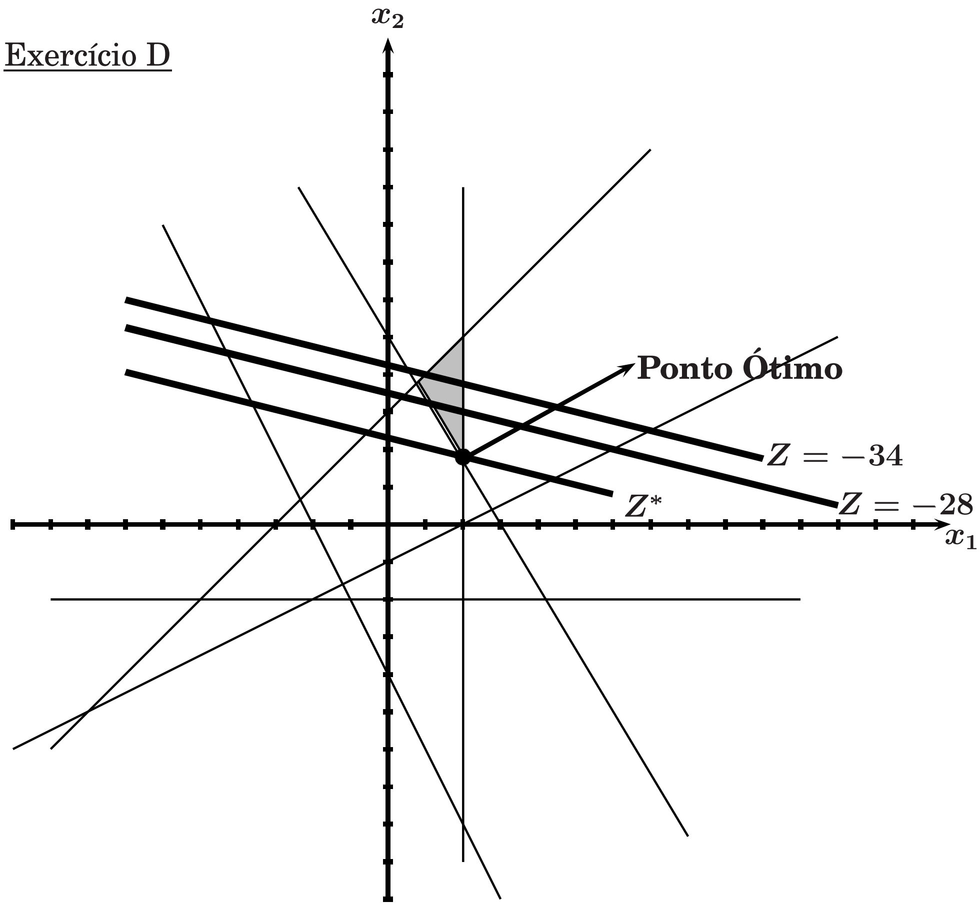


Exercício C



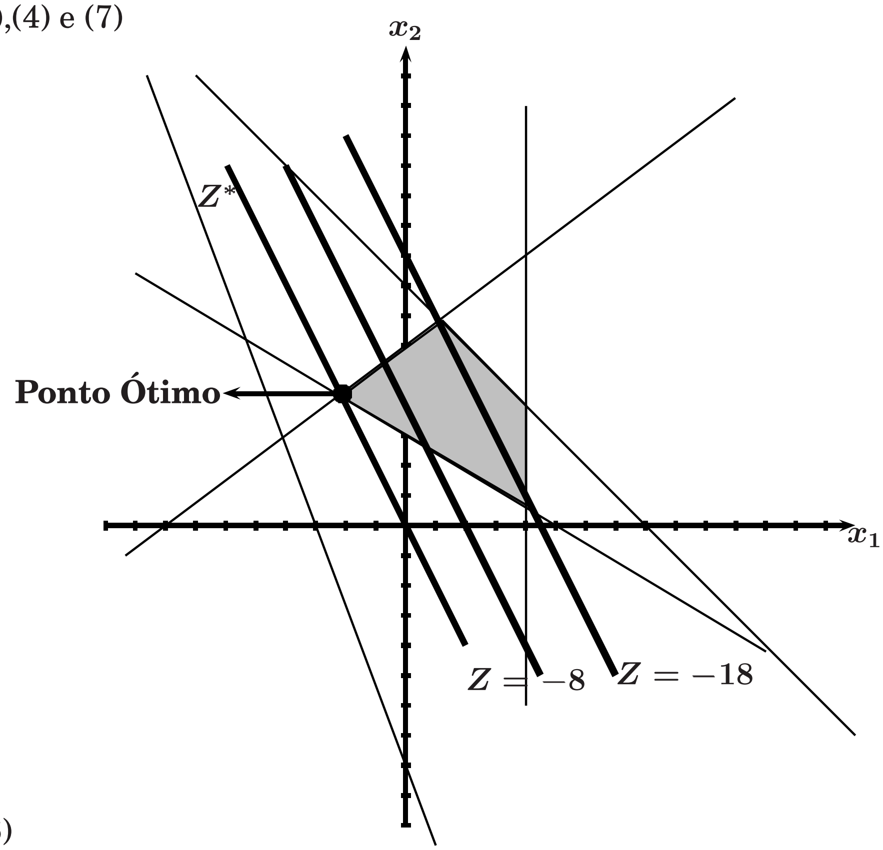
Redundantes: (1) e (5)

Exercício D



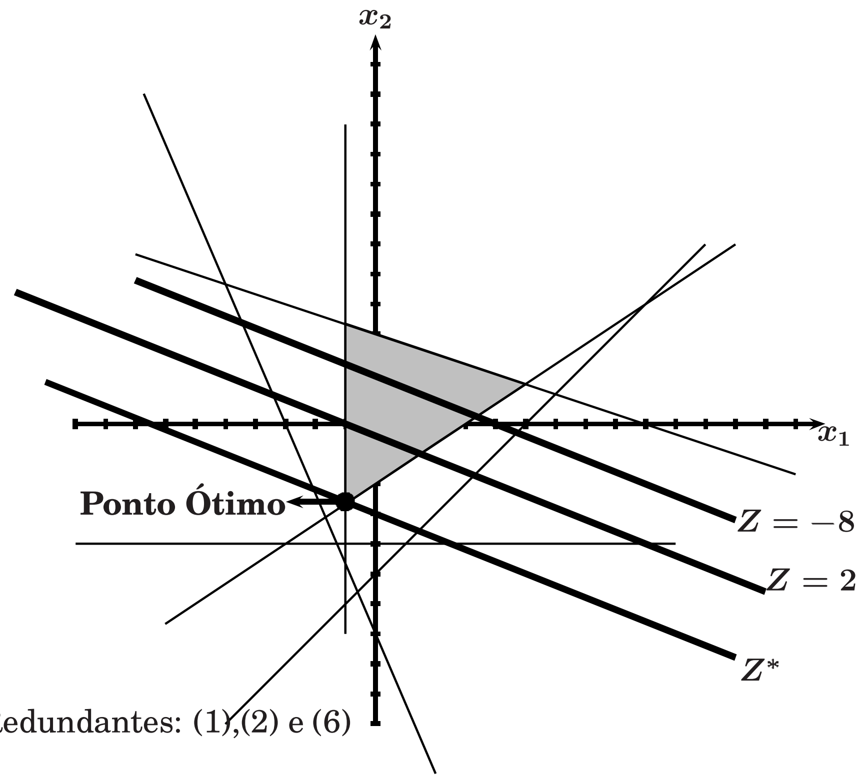
Redundantes: (1),(2),(4) e (7)

Exercício E



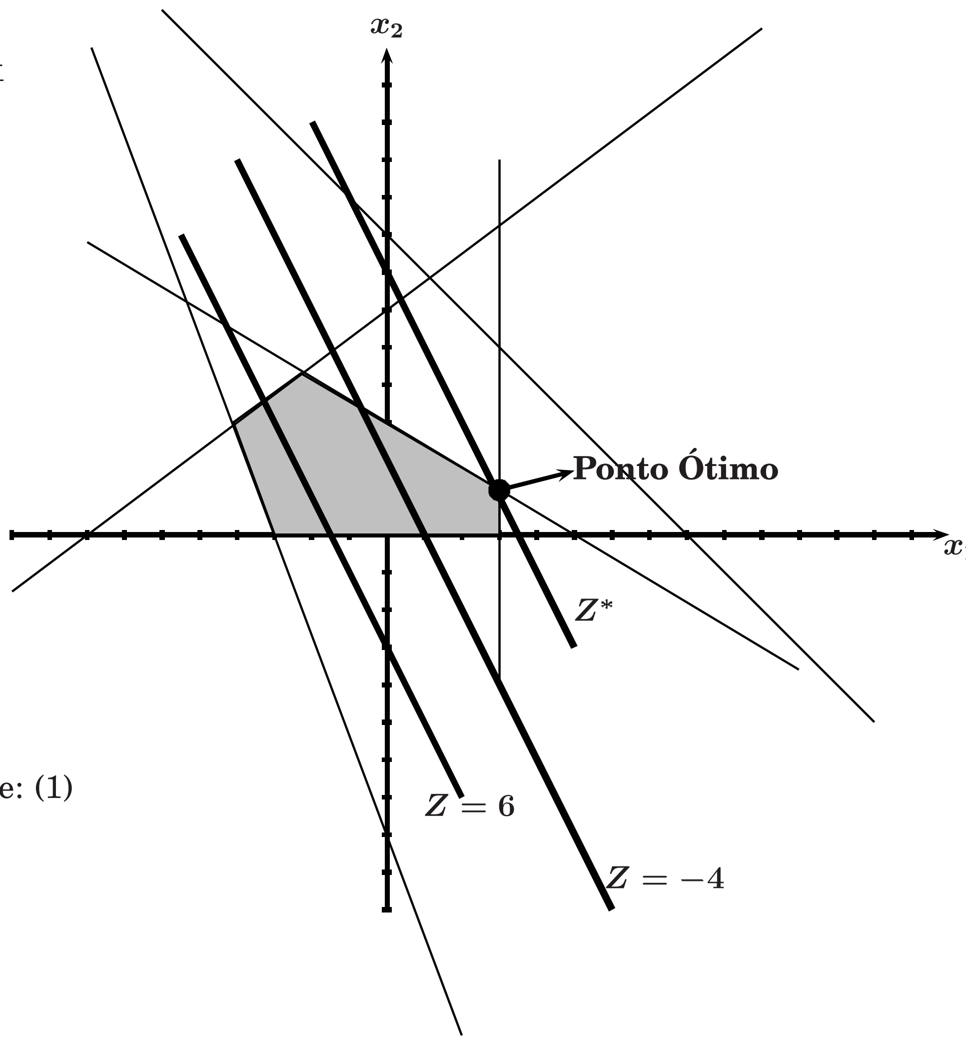
Redundantes: (2), (6)

Exercício F



Redundantes: (1),(2) e (6)

Exercício G



Redundante: (1)

1.5 O modelo geral da Programação Linear

O modelo geral da programação linear pode ser escrito como:

$$
\begin{array}{c}
\text{(MAX) } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{sujeito a} \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
x_i \geq 0
\end{array}
$$

a_{ij}, b_i e c_j são chamados de parâmetros do modelo e particularmente são chamados de:
$c_j \Rightarrow$ coeficientes da função objetivo
$b_i \Rightarrow$constantes do lado direito
$a_{ij} \Rightarrow$ coeficientes das restrições ou coeficientes tecnológicos

1.6 Variações do Modelo Geral

a) A função objetivo pode ser de minimização:
(MIN) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

b) Algumas restrições podem ser do tipo $\geq$:
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$

c) Algumas restrições podem ter sinal $=$:
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$

d) Algumas variáveis de decisão podem assumir qualquer valor, entre $-\infty$ e $+\infty$, e são chamadas de **irrestritas em sinal**.

1.7 O que está implícito em qualquer modelo de P.Linear

a) Proporcionalidade
Esta consideração implica em que o nível da contribuição de uma variável qualquer é sempre proporcional ao seu valor. Para exemplificar vejamos no nosso exemplo o caso da variável x_1. O seu lucro unitário é igual a 20. Esta propriedade diz que a contribuição de x_1 para o lucro total é $20x_1$ independentemente se x_1 é igual a 10 ou igual a 100.000.000. Em um esquema produtivo este fato nem sempre é verdade pois existe, quase sempre, um fator de economia de escala.
Os modelos de programação linear não levam isto em conta e ou se usa, se for o caso, uma aproximação ou se tem que usar programação não linear. Normalmente, a solução de modelos de programação não linear é muito mais complexa.

b) Aditividade

Esta consideração implica em que não há interação entre as diversas variáveis do modelo, ou seja, a contribuição do total de variáveis é a soma das contribuições individuais de cada uma das variáveis. Para exemplificar vamos considerar o nosso exemplo protótipo. A contribuição para o lucro total da variável x_1 é $20x_1$ independentemente se x_2 é igual a 1 ou 10.000. Por sua vez a contribuição de x_2 para o lucro total é $60x_2$ seja qual for o valor assumido por x_1. No mundo real isto, normalmente, também não acontece assim, ou seja, a quantidade de um produto pode influir na produção de outro independentemente das restrições tecnológicas.

Se em um modelo a consideração da aditividade modifica a essência do problema, deve-se usar programação não linear.

c) Divisibilidade

A partir da construção de um modelo de P.Linear nós transformamos um problema do mundo real para o "mundo matemático". Para encontrarmos a solução que procuramos, temos que resolver o problema matematicamente. A solução gráfica, por exemplo, é um procedimento matemático. Assim sendo, é perfeitamente normal que a solução de um modelo de P.Linear dê, como solução ótima, valores fracionários. Assim sendo poderia ter acontecido que a resposta para o nosso exemplo fosse $x_1^* = 17,96$ e $x_2^* = 14,88$. Mas x_1 e x_2 representam unidades de produtos. Como fabricar "pedaços" de produtos ? Será que a solução seria cortar a parte fracionária ? Isto poderia nos tirar do ótimo pois nem sempre o ótimo inteiro é o ótimo fracionário com a parte fracionária cortada.

Como se resolve na prática este tipo de problema ? Se as variáveis de decisão representam bens cujo valor de mercado é reduzido (uma mesa, por exemplo) trabalhamos com programação linear e simplesmente cortamos a parte fracionária dos valores ótimos. Se no entanto as variáveis representam bens de alto valor (um avião, por exemplo), temos que trabalhar com Programação Linear Inteira acrescentando as restrições de que as variáveis tem de ser inteiras. Porque, para este tipo de modelo, não trabalhar sempre com P.Linear inteira ? Porque o processo de obtenção da solução ótima é muito mais lento que a P.Linear simples.

d) Certeza

Esta consideração implica em que todos parâmetros do sistema são constantes conhecidas não se aceitando nenhuma incerteza de qualquer tipo. Se alguns dos parâmetros tem qualquer nível de incerteza a formulação como um modelo de P.Linear poderá levar a resultados incorretos.

1.8 Exemplos de formulação de modelos de Programação Linear

A) Em uma fazenda deseja-se fazer 10.000 Kilos de ração com o menor custo possível. De acordo com as recomendações do veterinário dos animais da fazenda, a mesma deve conter:
15% de proteína.
Um mínimo de 8% de fibra.
No mínimo 1100 calorias por kilo de ração e no máximo 2250 calorias por kilo.
Para se fazer a ração, estão disponíveis 4 ingredientes cujas características técnico-econômicas estão mostradas abaixo: (Dados em %, exceto calorias e custo)

	Proteína	**Fibra**	**Calorias/kg**	**Custo/kg**
Cevada	6,9	6	1.760	30
Aveia	8,5	11	1.700	48
Soja	9	11	1.056	44
Milho	27,1	14	1.400	56

A ração deve ser feita contendo no mínimo 20% de milho e no máximo 12% de soja.
Formule um modelo de P.Linear para o problema.

Solução
Variáveis de decisão
$x_i \Rightarrow$ Kilos do ingrediente i a serem usados na ração (i=1 (Cevada), i=2 (Aveia), i=3 (Soja), i=4 (Milho)).

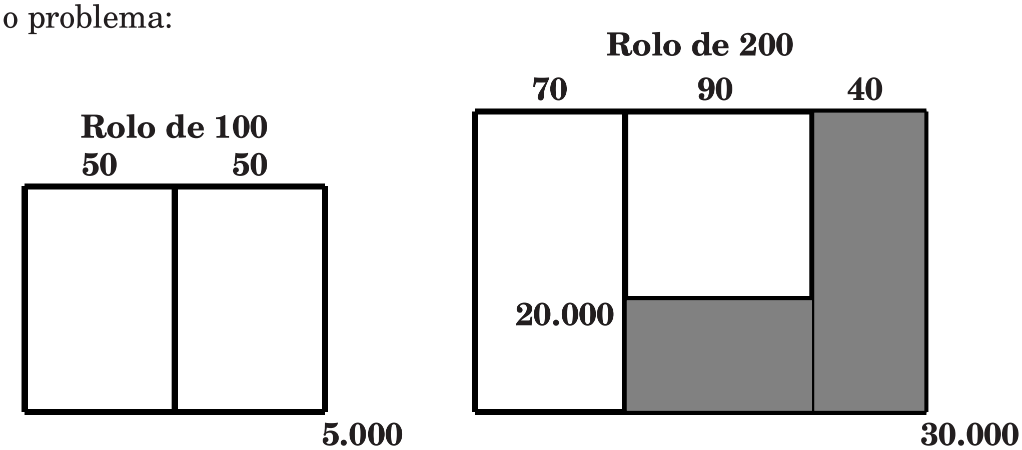
(Min) $Z = 30x_1 + 48x_2 + 44x_3 + 56x_4$
s.a.
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10000$ (Quantidade de ração)
$0,069x_1 + 0,085x_2 + 0,09x_3 + 0,271x_4 = 0,15 \times 10000$ (Proteína)
$0,06x_1 + 0,11x_2 + 0,11x_3 + 0,14x_4 \geq 0,08 \times 10000$ (Fibra)
$1760x_1 + 1700x_2 + 1056x_3 + 1400x_4 \geq 1100 \times 10000$ (calorias)
$1760x_1 + 1700x_2 + 1056x_3 + 1400x_4 \leq 2250 \times 10000$ (calorias)
$x_4 \geq 0,20 \times 10000$ (Milho)
$x_3 \leq 0,12 \times 10000$ (Soja)
$x_i \geq 0$

B) Uma fábrica de papel recebeu 3 pedidos de rolos de papel com as larguras e comprimentos mostrados abaixo:

Pedido	**Largura (cms)**	**Comprimento (cms)**
1	50	10.000
2	70	30000
3	90	20.000

A fábrica tem que produzir os pedidos a partir de 2 rolos de tamanho padrão que tem 100 e 200 centímetros de largura e comprimento muito grande (para efeitos práticos pode-se considerar infinito). Os rolos dos pedidos não podem ser emendados na largura embora possam ser emendados no comprimento.
Deseja-se determinar como devem ser cortados os 2 rolos de tamanho padrão para atender os pedidos, com o objetivo de que a perda de papel seja a mínima possível.
Formule um modelo de P.Linear para o problema.

Solução
Para um melhor entendimento do problema, vamos mostrar uma solução possível para o problema:



Esta solução consistiria em cortar o 1º rolo padrão (largura 100) em 2 tiras de 5.000 cms. Emendados no comprimento, atenderiam ao 1º pedido. Para atender o 2º e o 3º pedidos, o 2º rolo seria cortado conforme mostra o desenho.
Dois ítens importantes devem ser observados neste exemplo: A perda (a parte hachurada: $40 \times 30000 + 90 \times 10000 = 2100000\, cm^2$) e que é possível ter perda com largura de pedido, ou seja, os 10000 cms cortados com largura 90 cms.
Podemos construir uma tabela com os possíveis padrões de corte, lembrando que podemos desprezar os padrões de corte em que a perda na largura será igual ou maior que a menor largura de pedido (50 cms).

	Rolo de 100 cms			**Rolo de 200 cms**					
Largura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
50	2	–	–	4	2	2	1	–	–
70	–	1	–	–	1	–	2	1	–
90	–	–	1	–	–	1	–	1	2
Perda na largura	0	30	10	0	30	10	10	40	20

Podemos agora definir as variáveis de decisão:
$x_i \Rightarrow$ cms, cortados no comprimento, no padrão i (i=1,2,. . . ,9)
$S_i \Rightarrow$ Sobra em cms, no comprimento, com largura de pedido (i=1 (50),i=2 (70), i=3 (90))

O modelo fica como:

(MIN) $Z = 30x_2+10x_3+30x_5+10x_6+10x_7+40x_8+20x_9+50S_1+70S_2+90S_3$

s.a.

$2x_1 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 10000 + S_1$ (largura 50cms)

$x_2 + x_5 + 2x_7 + x_8 = 30000 + S_2$ (largura 70cms)

$x_3 + x_6 + x_8 + 2x_9 = 20000 + S_3$ (largura 90cms)

$S_i, x_i \geq 0$

C) O gerente de um restaurante que está encarregado de servir o almoço, em uma convenção, nos próximos 5 dias tem que decidir como resolver o problema do suprimento de guardanapos. As necessidades para os 5 dias são 110, 210, 190, 120 e 100 unidades respectivamente. Como o guardanapo é de um tipo especial, o gerente não tem nenhum em estoque e suas alternativas durante os 5 dias são:

- Comprar guardanapos novos ao preço de \$10 cada um.
- Mandar guardanapos já usados para a lavanderia onde eles podem receber 2 tratamentos:
  (a) Devolução em 48 horas ao preço de \$3 a peça.
  (b) Devolução em 24 horas ao preço de \$5 a peça.

Considerando que o objetivo do gerente é minimizar o custo total com os guardanapos formule um modelo de P.Linear para o problema.
As seguintes observações devem ser levadas em conta:

- O tempo da lavanderia é considerado ser exato, ou seja, o guardanapo enviado as 15 horas de um dia volta as 15 horas do dia seguinte (serviço de 24 horas) ou seja após o almoço. Idem para o serviço de 48 horas.
- Após a convenção os guardanapos serão jogados no lixo.

Solução
Variáveis de decisão
$x_i \Rightarrow$ nº de guardanapos a serem comprados no **iésimo** dia
$y_i \Rightarrow$ nº de guardanapos usados enviados, no **iésimo** dia, para a lavanderia – serviço de 24 horas
$t_i \Rightarrow$ nº de guardanapos usados enviados, no **iésimo** dia, para a lavanderia – serviço de 48 horas
Visando auxiliar a formulação do modelo vamos construir uma tabela mostrando as várias fontes para se obter, a cada dia, guardanapos limpos :

	DIA				
Origem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Novo	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Lav. – 24 horas			y_1	y_2	y_3
Lav. – 48 horas				t_1	t_2
Total Necessário	**110**	**210**	**190**	**120**	**100**

As restrições para a necessidade de guardanapos limpos são:
$x_1 = 110 \Rightarrow$ não precisa entrar no modelo
$x_2 = 210 \Rightarrow$ não precisa entrar no modelo
$x_3 + y_1 = 190$
$x_4 + y_2 + t_1 = 120$
$x_5 + y_3 + t_2 = 100$
Para se definir as restrições correspondentes as quantidades de guardanapos usados temos que definir uma outra variável decisão:
$v_i \Rightarrow$ nº de guardanapos usados que, no **iésimo** dia, não são enviados para a lavanderia.
Devemos nos lembrar que o ótimo não implica, necessáriamente, em que todos os guardanapos usados sejam lavados.
As restrições ficam :
$v_1 + y_1 + t_1 = 110$
$y_2 + t_2 + v_2 = 210 + v_1$
$y_3 + v_3 = 190 + v_2$
$v_4 = 120 + v_3$
$v_5 = 100 + v_4$
O modelo fica como:
(MIN) $Z = 10(x_3 + x_4 + x_5) + 5(y_1 + y_2 + y_3) + 3(t_1 + t_2)$

s.a.

$$
\begin{aligned}
&x_3 + y_1 = 190 \\
&x_4 + y_2 + t_1 = 120 \\
&x_5 + y_3 + t_2 = 100 \\
&v_1 + y_1 + t_1 = 110 \\
&y_2 + t_2 + v_2 = 210 + v_1 \\
&y_3 + v_3 = 190 + v_2 \\
&v_4 = 120 + v_3 \\
&v_5 = 100 + v_4 \\
&x_i, y_i, t_i, v_i \geq 0
\end{aligned}
$$

D) A Motorauto S/A fabrica 3 modelos de automóveis nas suas fábricas: Modelo de 1.100 cilindradas (c.c.), modelo de 1.400 c.c. e modelo de 1.800 c.c. Um conflito trabalhista faz prever uma greve prolongada na fábrica 1 num futuro muito próximo. Para fazer face a esta situação, a direção da empresa decidiu preparar um plano excepcional de produção e vendas para o próximo período, pressupondo que não haverá produção na fábrica 1 durante este período. Neste mesmo período, a capacidade de produção da fábrica 2 será de 4.000 unidades de 1.100 c.c., ou 3.000 unidades de 1.400 c.c. ou 2.000 unidades de 1.800 c.c. ou qualquer combinação apropriada destes 3 modelos. Uma combinação apropriada pode ser, por exemplo, 2.000 unidades de 1.100 c.c. (50% da capacidade), 900 unidades de 1.400 c.c. (30% da capacidade) e 400 modelos de 1.800 c.c. (20% da capacidade). Analogamente a fábrica 3 tem capacidade para 3.000 modelos de 1.100 c.c. ou 8.000 modelos de 1.400 c.c. ou qualquer combinação apropriada destes 2 modelos, não sendo o modelo de 1.800 c.c. produzido nesta fábrica. Cada automóvel de 1.100 c.c. é vendido por \$1.150, cada modelo de 1.400 c.c. é vendido por \$1.450 e cada modelo de 1.800 c.c. é vendido por \$1.800. O custo de produção na fábrica 2 é de \$875, \$1.200 e \$1.450 para cada unidade produzida dos modelos de 1.100 c.c., 1.400 c.c. e 1.800 c.c. respectivamente. Por sua vez o custo de produção na fábrica 3 é de \$900 para cada unidade produzida do modelo de 1.100 c.c. e de \$1.100 para cada unidade do modelo de 1.400 c.c. A empresa assumiu compromissos que a obrigam a fornecer 1.000 unidades do modelo de 1.800 c.c. para exportação. Por outro lado, dada a queda na procura pelos modelos de 1.100 c.c. e 1.800 c.c., o departamento comercial estima em 1.000 e 2.500 unidades as vendas máximas destes 2 modelos, respectivamente. Como o modelo de 1.400 c.c. é atualmente um grande sucesso comercial, não existe limitação para suas vendas. No início do período, os estoques dos 3 modelos são de 200 unidades do modelo de 1.100 c.c., 600 unidades do modelo de 1.400 c.c. e 200 unidades do modelo de 1.800 c.c. É possível, dados os últimos acordos assinados, importar da Argentina até 500 unidades do modelo de 1.100 c.c. Cada modelo importado custará \$1.000.

Considerando que o objetivo da Motorauto é maximizar seus lucros, formule um modelo de P.Linear para o problema.

Solução

Variáveis de decisão

$x_1 \Rightarrow$ nº de unidades do modelo de 1.100 c.c. a serem produzidas na fábrica 2.
$x_2 \Rightarrow$ nº de unidades do modelo de 1.400 c.c. a serem produzidas na fábrica 2.
$x_3 \Rightarrow$ nº de unidades do modelo de 1.800 c.c. a serem produzidas na fábrica 2.
$x_4 \Rightarrow$ nº de unidades do modelo de 1.100 c.c. a serem produzidas na fábrica 3.
$x_5 \Rightarrow$ nº de unidades do modelo de 1.400 c.c. a serem produzidas na fábrica 3.
$x_6 \Rightarrow$ nº de unidades do modelo de 1.100 c.c. a serem importadas da Argentina.

A função objetivo é uma função de lucro sendo cada lucro individual calculado como a diferença entre o preço de venda e o custo de produção.

O modelo do problema fica como:

(MAX) $Z = 275x_1 + 250x_2 + 350x_3 + 250x_4 + 350x_5 + 150x_6$

s.a.

$x_1 + x_4 + x_6 \leq (1000 - 200)$ (modelo de 1.100 c.c.)

$x_6 \leq 500$ (modelo de 1.100 c.c.)

$x_3 \geq (1000 - 200)$ (modelo de 1.800 c.c.)

$x_3 \leq (2500 - 200)$ (modelo de 1.800 c.c.)

$\frac{x_1}{4000} + \frac{x_2}{3000} + \frac{x_3}{2000} \leq 1$ (capacidade de produção–Fábrica 2)

$\frac{x_4}{3000} + \frac{x_5}{8000} \leq 1$ (capacidade de produção–Fábrica 3)

$x_i \geq 0$

E) Uma empresa responsável pelo abastecimento semanal de um certo produto ao Rio de Janeiro e a São Paulo, pretende estabelecer um plano de distribuição do produto a partir dos centros produtores situados em Belo Horizonte, Ribeirão Preto e Campos. As quantidades semanalmente disponíveis em B.Horizonte, R.Preto e Campos são 70, 130 e 120 toneladas respectivamente. O consumo semanal previsto deste produto é de 180 toneladas no Rio e 140 toneladas em S.Paulo. Os custos de transporte, em \$/ton, de cada centro produtor para cada centro consumidor está dado abaixo:

	Rio	**São Paulo**
B.Horizonte	13	25
R.Preto	25	16
Campos	15	40

Considerando que o objetivo da empresa é minimizar seu custo total de transporte, formule um modelo de P.Linear para o problema.

Solução

Variáveis de decisão

$x_{ij} \Rightarrow$ Toneladas a serem transportadas da origem i (i=1 (B.Horizonte), i=2 (R.Preto), i=3 (Campos)) para o destino j (j=1 (Rio), j=2 (São Paulo)).

O modelo fica como:

(MIN) $Z = 13x_{11} + 25x_{12} + 25x_{21} + 16x_{22} + 15x_{31} + 40x_{32}$

$s.a.$

$x_{11} + x_{12} = 70$ (B.Horizonte)

$x_{21} + x_{22} = 130$ (R.Preto)

$x_{31} + x_{32} = 120$ (Campos)

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 180$ (Rio)

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 140$ (S.Paulo)

$x_{ij} \geq 0$

1.9 Exercícios

A) Na produção de unidades de 4 tipos de produtos, são utilizadas 2 máquinas. O tempo utilizado na fabricação de cada unidade, de cada tipo de produto, em cada uma das 4 máquinas está dado na tabela abaixo:

	Tempo por unidade produzida (horas)			
Máquina	**Produto 1**	**Produto 2**	**Produto 3**	**Produto 4**
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

O custo total de produção de uma unidade de cada produto é diretamente proporcional ao tempo de uso da máquina. Considere que o custo por hora para as máquinas 1 e 2 são \$10 e \$15 respectivamente. O total de horas disponíveis para todos os produtos nas máquinas 1 e 2 são 500 e 380 respectivamente.
Se o preço de venda, por unidade, dos produtos 1, 2, 3 e 4 é de \$65, \$70, \$55 e \$45, formule o problema como um modelo de P.Linear com o objetivo de maximizar o lucro líquido total.

B) Uma companhia de aviação está considerando a compra de aviões de passageiros de 3 tipos: de pequeno curso, de curso médio e de longo curso. O preço de compra seria de \$6,7M para cada avião de longo curso, \$5M para aviões de médio curso e \$3,5M para aviões de pequeno curso. A diretoria autorizou um gasto máximo de \$150M para estas compras, independentemente de quais aviões serão comprados. As viagens aéreas em todos os tipos de aviões, fazem prever que os aviões andarão sempre lotados. Estima-se que o lucro anual líquido seria de \$0,42M para cada avião de longo curso, \$0,30M para avião de médio curso e \$0,23M para avião de pequeno curso. A companhia terá pilotos treinados para pilotar 30 novos aviões. Se somente aviões de pequeno curso forem comprados, a divisão de manutenção estaria apta a manter 40 novos aviões. Cada avião de médio curso gasta 1/3 a mais de manutenção do que o dispendido por um avião de pequeno curso e o de longo curso 2/3 a mais. As informações acima foram obtidas por uma análise preliminar do problema. Uma análise mais detalhada será feita posteriormente. No entanto, usando os dados acima como uma primeira aproximação, a diretoria da empresa deseja conhecer quantos aviões de cada tipo deveriam ser comprados se o objetivo é maximizar o lucro.
Formule um modelo de P.Linear para este problema. (M = 1.000.000)

C) Uma empresa tem 3 fábricas com ociosidade na produção. Todas as 3 fábricas tem capacidade de produzir um certo produto e a gerência decidiu usar uma parte da ociosidade na produção deste produto. O produto pode ser feito em 3 tamanhos: grande, médio e pequeno, que dão um lucro líquido de \$12, \$10 e \$9 respectivamente. As fábricas 1, 2 e 3 tem capacidade de fabricar 500, 600 e 300 unidades do produto respectivamente, independentemente do tamanho a ser produzido. Há, no entanto, limitação do espaço para estocagem. As fábricas 1, 2 e 3 tem 9000, 8000 e 3500 m^2 de área para estocagem respectivamente. Cada unidade de tamanho grande, médio e pequeno necessita de 20, 15 e 12

m^2 respectivamente. O Departamento de Vendas indicou que 600, 800 e 500 unidades dos tamanhos grande, médio e pequeno, respectivamente, podem ser vendidas por dia. De maneira a manter uma certa uniformidade, a gerencia decidiu que a percentagem do uso das capacidades ociosas das 3 fábricas devem ser iguais. A gerência deseja saber quanto de cada tamanho deve ser produzido em cada fábrica de maneira que o lucro seja máximo.
Formule um modelo de P.Linear para este problema.

D) Um investidor pode investir dinheiro em duas atividades A e B disponíveis no início dos próximos 5 anos. Cada \$1 investido em A no começo de um ano retorna \$1,40 (um lucro de \$0,40) dois anos mais tarde (a tempo de imediato reinvestimento). Cada \$1 investido em B no início de um ano retorna \$1,70, três anos mais tarde. Existem ainda 2 atividades C e D que estarão disponíveis no futuro. Cada \$1 investido em C no início do segundo ano retorna \$2,00, quatro anos mais tarde. Cada \$1 investido em D no começo do quinto ano, retorna \$1,30 um ano mais tarde. O investidor tem \$10.000. Ele deseja conhecer como investir de maneira a maximizar a quantidade de dinheiro acumulado no início do sexto ano.
Formule um modelo de P.Linear para este problema. Considere que não há inflação.

E) Com seus conhecimentos do curso, um aluno calcula que poderia se preparar com perfeição para o exame de uma certa disciplina D_1 em 20 horas de estudo intensivo. Para uma outra disciplina D_2 ele precisa de 25 horas. Para passar, ele precisa obter no mínimo 50 pontos (num máximo de 100) em cada uma delas. Além disso, ele deseja alcançar a maior média ponderada possível, sendo 3 e 5 os pesos de D_1 e D_2 respectivamente. Ele dispõe de apenas 30 horas para estudar.
Formule o problema como um modelo de P.Linear, a fim de obter a distribuição das horas de estudo, considerando proporcionalidade entre o esforço e o rendimento de seus estudos.

F) O Governo decidiu instalar em uma certa área 3 indústrias: U_1, U_2 e U_3. Três localidades diferentes L_1, L_2 e L_3 foram selecionadas. As condições geoeconômicas (energia, comunicações, etc...) variam de local para local. As indústrias também possuem características técnicas distintas (custos operacionais, capacidade, tipo de produção, etc...). Um estudo preliminar levou a conclusão que as eficiências relativas das diversas indústrias nas diferentes localidades são:

	L_1	L_2	L_3
U_1	1,5	1	2
U_2	0,8	0,6	2,5
U_3	2	0,7	1

Assim em L_3, por exemplo, U_1 funcionaria 2 vezes mais eficientemente, do ponto de vista econômico, do que em L_2. O problema é distribuir as 3 indústrias pelas 3 localidades (no máximo 1 indústria em cada localidade) da ma-

neira mais eficiente.
Formule o problema como um modelo de P.Linear.

G) Uma companhia deseja obter uma nova liga metálica com 30% de chumbo, 20% de zinco e 50% de estanho a partir de alguns minérios tendo as seguintes propriedades:

	MINÉRIOS				
Propriedades	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
% – Chumbo	30	10	50	10	50
% – Zinco	60	20	20	10	10
% – Estanho	10	70	30	80	40
Custo ($/kg)	8,5	6	8,9	5,7	8,8

O objetivo é determinar as proporções destes minérios que deveriam ser misturados para produzir a nova liga com o menor custo possível.
Formule este problema como um modelo de P.Linear.

H) Uma família de fazendeiros possui 100 acres de terra e tem $30.000 em fundos disponíveis para investimento. Seus membros podem produzir um total de 3.500 homens-hora de trabalho durante os meses de inverno e 4.000 homens-horas durante o verão. Se todos estes homens-horas não são necessários, os membros mais jovens da família podem ir trabalhar em uma fazenda da vizinhança por $4,00 por hora durante o inverno e $4,50 por hora durante o verão. A família obtém renda com 3 colheitas e 2 tipos de criação de animais: vacas leiteiras e galinhas (para obter ovos). Nenhum investimento é necessário para as colheitas mas no entanto cada vaca necessita de um investimento de $900 e cada galinha de $7. Cada vaca necessita de 1,5 acre de terra, 100 homens-hora de trabalho no inverno e outros 50 homens-hora no verão. Cada vaca produzirá uma renda líquida anual de $800 para a família. Por sua vez cada galinha não necessita de área, requer 0,6 homens-hora durante o inverno e 0,3 homens-hora no verão. Cada galinha produzirá uma renda líquida de $5 (anual). O galinheiro pode acomodar um máximo de 3.000 galinhas e o tamanho dos currais limita o rebanho para um máximo de 32 vacas. As necessidades em homens-hora e a renda líquida anual, por acre plantado, em cada uma das 3 colheitas estão mostradas abaixo:

	Soja	**Milho**	**Feijão**
Homens–hora no inverno	20	35	10
Homens–hora no verão	50	75	40
Renda anual líquida ($)	375	550	250

A família deseja maximizar sua renda anual.
Formule este problema como um modelo de P.Linear.

I) Um avião de carga tem 3 compartimentos para armazenar carga: frente, centro e traseira. Estes compartimentos tem limite de capacidade em termos de peso e espaço, como mostrado abaixo:

Compartimento	**Capacidade peso (ton)**	**Capacidade espaço (m^3)**
Frente	8	140
Centro	12	200
Traseira	7	85

Além disto, os pesos das cargas em cada compartimento devem manter a mesma proporção em relação a capacidade de cada compartimento, a fim de manter o equilíbrio do avião.
As 4 cargas abaixo estão disponíveis para carregar um determinado vôo:

Carga	**Peso (ton)**	**Volume (m^3/ton)**	**Lucro ($/ton)**
1	14	14	100
2	11	20	130
3	18	17	115
4	9	11	90

As cargas podem ser divididas em "pedaços" de qualquer peso e tamanho. O objetivo é determinar quanto de cada carga deveria ser aceita e como distribuí-la entre os compartimentos do avião de maneira a maximizar o lucro total do vôo. Formule este problema como um modelo de P.Linear.

J) Para um bar que funciona 24 horas por dia, a seguinte quantidade de empregados é necessária:

Hora do dia	**Nº mínimo de empregados**
2 – 6	4
6 – 10	8
10 – 14	10
14 – 18	7
18 – 22	12
22 – 2	4

Cada empregado trabalha 8 horas consecutivas por dia. O objetivo é achar o menor número necessário de empregados de modo que a necessidade mínima acima seja obedecida.
Formule o problema como um modelo de P.Linear.

K) Uma fábrica descontinuou a produção de um produto que não estava dando lucro. Isto criou uma considerável capacidade de produção ociosa. A gerência está considerando em usar esta capacidade ociosa em um ou mais, de 3 produtos, os quais chamaremos de produtos 1, 2 e 3. A capacidade disponível das máquinas que poderiam limitar a saída está dada na tabela abaixo:

Tipo de Máquina	Tempo disponível (em máquinas–hora por semana)
A	500
B	350
C	150

O número de máquinas-hora necessárias para cada produto é:

Tipo de Máquina	Produto 1	Produto 2	Produto 3
A	9	3	5
B	5	4	0
C	3	0	2

O Departamento de Vendas indicou que o potencial de vendas para os produtos 1 e 2 excedem a taxa máxima de produção e que o potencial de vendas para o produto 3 é de 20 unidades por semana. O lucro unitário seria de \$30, \$12 e \$15 respectivamente para os produtos 1, 2 e 3. Quanto se deve fabricar dos produtos 1, 2 e 3 de maneira que o lucro seja máximo.
Formule o problema como um modelo de P.Linear.

1.10 Respostas dos exercícios da seção 1.9

Exercício A

$x_i \Rightarrow$ Unidades do produto i a serem produzidas

(MAX) $Z = 10x_2 - 5x_4$

s.a

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 500$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380$

$x_i \geq 0$

Exercício B

$x_1 \Rightarrow$ nº de aviões de longo curso a serem comprados

$x_2 \Rightarrow$ nº de aviões de médio curso a serem comprados

$x_3 \Rightarrow$ nº de aviões de pequeno curso a serem comprados

(MAX) $Z = 0,42x_1 + 0,30x_2 + 0,23x_3$

s.a

$6,7x_1 + 5x_2 + 3,5x_3 \leq 150$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$

$\frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + x_3 \leq 40$

$x_i \geq 0$

Exercício C

$x_{ij} \Rightarrow$ quantidade a ser produzida do tamanho j (j=g,m,p) na fábrica i (i=1,2,3)

(MAX) $Z = 12x_{1g} + 10x_{1m} + 9x_{1p} + 12x_{2g} + 10x_{2m} + 9x_{2p} + 12x_{3g} + 10x_{3m} + 9x_{3g}$

s.a.

$x_{1g} + x_{1m} + x_{1p} \leq 500$

$x_{2g} + x_{2m} + x_{2p} \leq 600$

$x_{3g} + x_{3m} + x_{3p} \leq 300$

$20x_{1g} + 15x_{1m} + 12x_{1p} \leq 9000$

$20x_{2g} + 15x_{2m} + 12x_{2p} \leq 8000$

$20x_{3g} + 15x_{3m} + 12x_{3p} \leq 3500$

$x_{1g} + x_{2g} + x_{3g} \leq 600$

$x_{1m} + x_{2m} + x_{3m} \leq 800$

$x_{1p} + x_{2p} + x_{3p} \leq 500$

$\frac{x_{1g}+x_{1m}+x_{1p}}{500} = \frac{x_{2g}+x_{2m}+x_{2p}}{600} = \frac{x_{3g}+x_{3m}+x_{3p}}{300}$

$x_{ij} \geq 0$

Exercício D

$X_t \Rightarrow$ \$ investido na atividade X(X=A,B,C e D) no período t(t=1,2,3,4,5)

$R_t \Rightarrow$ \$ não investido no período t(t=1,2,3,4,5)

(MAX) $Z = 2C_2 + 1,7B_3 + 1,4A_4 + 1,3D_5 + R_5$

s.a.

$A_1 + B_1 + R_1 = 10000$

$-R_1 + A_2 + B_2 + C_2 + R_2 = 0$

$-1,4A_1 - R_2 + A_3 + B_3 + R_3 = 0$

$-1,7B_1 - 1,4A_2 - R_3 + A_4 + R_4 = 0$

$-1,7B_2 - 1,4A_3 - R_4 + D_5 + R_5 = 0$

$X_t, R_t \geq 0$

Exercício E

Cada hora de estudo na disciplina D_1 garante ao aluno 5 pontos.

Para a disciplina D_2 o rendimento é de 4 pontos por hora.

$X \Rightarrow$ nº de horas que o aluno estudará D_1.

$Y \Rightarrow$ nº de horas que o aluno estudará D_2.

$$(\text{MAX})\ Z = \frac{3X + 5Y}{8}$$

s.a.

$$\begin{aligned} X + Y &= 30 \\ 5X &\geq 50 \\ 4Y &\geq 50 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercício F

$x_{ij} \Rightarrow$ indústria U_i instalada na cidade L_j.

$$(\text{MAX})\ Z = 1,5x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 0,8x_{21} + 0,6x_{22} + 2,5x_{23} + 2x_{31} + 0,7x_{32} + x_{33}$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 1 \\ X_{ij} &= 0 \text{ ou } 1 \end{aligned}$$

Exercício G

$x_i \Rightarrow$ fração de 1 kilo do minério i usada na produção de 1 kilo da nova liga.

$$(\text{MIN})\ Z = 8,5x_1 + 6x_2 + 8,9x_3 + 5,7x_4 + 8,8x_5$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ 0,3x_1 + 0,1x_2 + 0,5x_3 + 0,1x_4 + 0,5x_5 &= 0,3 \\ 0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 0,1x_5 &= 0,2 \\ 0,1x_1 + 0,7x_2 + 0,3x_3 + 0,8x_4 + 0,4x_5 &= 0,5 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Observe que a 1ª restrição é redundante pois é a soma das outras 3.

Exercício H

$x_i\ (i = 1, 2, 3) \Rightarrow$ acres plantados com soja, milho e feijão, respectivamente.

$x_i\ (i = 4, 5) \Rightarrow$ nº de vacas e galinhas, respectivamente.

$x_i\ (i = 6, 7) \Rightarrow$ excesso de homens-hora no inverno e verão, respectivamente.

$$(\text{MAX})\ Z = 375x_1 + 550x_2 + 250x_3 + 800x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 4,5x_7$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 1,5x_4 &\leq 100 \\ 900x_4 + 7x_5 &\leq 30000 \\ 20x_1 + 35x_2 + 10x_3 + 100x_4 + 0,6x_5 + x_6 &= 3500 \\ 50x_1 + 75x_2 + 40x_3 + 50x_4 + 0,3x_5 + x_7 &= 4000 \\ x_4 &\leq 32 \\ x_5 &\leq 3000 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercício I

$x_{ij} \Rightarrow$ toneladas de carga i ($i = 1, 2, 3, 4$) armazenadas no compartimento j ($j = 1, 2, 3$) onde 1(frente), 2(centro) e 3(traseira).

(MAX) $Z = 100(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 130(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 115(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + 90(x_{41} + x_{42} + x_{43})$

s.a.

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 14\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 11\\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 18\\
&x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 9\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 8\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \leq 12\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \leq 3\\
&14x_{11} + 20x_{21} + 17x_{31} + 11x_{41} \leq 140\\
&14x_{12} + 20x_{22} + 17x_{32} + 11x_{42} \leq 200\\
&14x_{13} + 20x_{23} + 17x_{33} + 11x_{43} \leq 85
\end{aligned}
$$

$$\frac{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}}{8} = \frac{x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}}{12} = \frac{x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}}{7}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Exercício J

$x_j \Rightarrow$ nº de empregados começando no início do período j ($j = 1, 2, ..., 6$).

(MIN) $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

s.a.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_6 \geq 4\\
&x_1 + x_2 \geq 8\\
&x_2 + x_3 \geq 10\\
&x_3 + x_4 \geq 7\\
&x_4 + x_5 \geq 12\\
&x_5 + x_6 \geq 4\\
&x_j \geq 0
\end{aligned}
$$

Exercício K

(MAX) $Z = 30x_1 + 12x_2 + 15x_3$

s.a

$$
\begin{aligned}
&9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 500\\
&5x_1 + 4x_2 \leq 350\\
&3x_1 + 2x_3 \leq 150\\
&x_3 \leq 20\\
&x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Capítulo 2

O Método Simplex

O chamado Método Simplex foi apresentado por George B. Dantzig, um matemático americano, em 1947. Nos anos seguintes o próprio Dantzig e outros matemáticos foram aperfeiçoando-o, principalmente visando torná-lo mais eficiente do ponto de vista computacional. Estas "melhorias" no entanto não mudaram a sua essência e, embora novos métodos tenham surgido no final da década de 80, o Simplex é ainda o algorítimo mais usado para resolver modelos de P.Linear e, provavelmente, o mais usado de todos os algorítimos matemáticos.

2.1 Definições básicas

Solução É qualquer atribuição de valores para as variáveis de decisão do modelo.

Solução Praticável É qualquer solução em que nenhuma das restrições do modelo é violada.

Solução Impraticável É qualquer solução em que pelo menos uma das restrições do modelo é violada.

Solução Básica Dado um conjunto de m equações linearmente independentes e n incógnitas, onde $n > m$, se define como solução básica a solução para o conjunto de equações em que $(n - m)$ variáveis são feitas iguais a 0 e as restantes são obtidas da resolução do sistema de equações.

Exemplo: Seja o sistema abaixo:
$x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 2$
temos $m = 2$ e $n = 5$.
Cada solução básica terá $(5-2) = 3$ variáveis iguais a 0, por exemplo x_3,x_4 e x_5 e $(5-3) = 2$ obtidas da resolução do sistema, ou seja, $x_1 = 10$ e $x_2 = -4$. É óbvio que variando-se as variáveis feitas iguais a zero teremos novas soluções básicas. O número de soluções básicas que podem ser obtidas vem da fórmula :

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

As variáveis diferentes de 0 são chamadas de **variáveis básicas** e as iguais a 0 são chamadas de **variáveis não básicas**.
Solução básica degenerada: É uma solução básica em que pelo menos uma das variáveis básicas é igual a 0. Esta variável é chamada de variável básica degenerada.
Variáveis de Folga: São variáveis que são acrescentadas as inequações para transformá-las em equações. Denominaremos as variáveis de folga de F_i, onde i é o índice da variável.
Exemplo: $2x_1 \leq 80 \Rightarrow 2x_1 + F_1 = 80$

2.2 Um método não muito eficiente

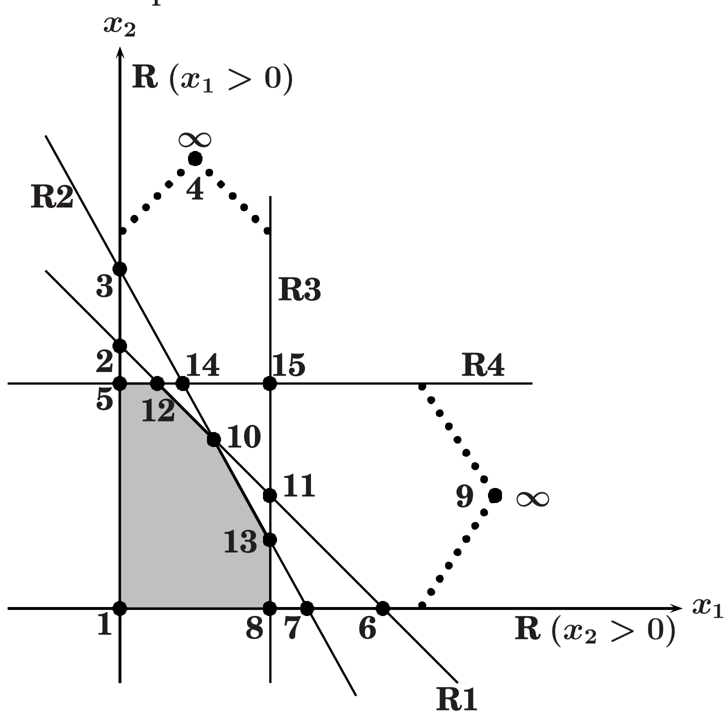
Vamos voltar ao nosso exemplo:

$$\begin{array}{c}
\text{(MAX) } Z = 20x_1 + 60x_2 \\
\text{s.a.} \\
70x_1 + 70x_2 \leq 4900 \\
90x_1 + 50x_2 \leq 4500 \\
2x_1 \leq 80 \\
3x_2 \leq 180 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

Vamos acrescentar variáveis de folga as 4 restrições do modelo:
(1) $70x_1 + 70x_2 + F_1 = 4900$
(2) $90x_1 + 50x_2 + F_2 = 4500$
(3) $2x_1 + F_3 = 80$
(4) $3x_2 + F_4 = 180$
Temos um sistema de equações lineares com 4 (m) equações e 6 (n) variáveis. Deste sistema podemos obter:
$\frac{6!}{4!2!} = 15$ soluções básicas.
É importante observar que as variáveis de folga, incluídas no exemplo, tem um significado físico relacionado com o modelo apresentado. Assim F1, por exemplo, representa o número de kilos da matéria prima tipo **A** que não serão utilizadas na fabricação dos produtos tipos I e II.
Em resumo, embora tenham sido usadas para transformar inequações em equações, as variáveis de folga tem um significado físico relacionado com o problema sendo modelado.
Outro ponto a ser mencionado é que, como x_1 e x_2 são $>= 0$, as variáveis de folga também só podem ser $>= 0$. Logo todas as variáveis são $>= 0$.
Voltando ao exemplo protótipo podemos encontrar as 15 soluções básicas do sistema de equações lineares formado pelas restrições, acrescidas das suas respectivas variáveis de folga. Cada solução básica será obtida escolhendo-se 2 variáveis e fazendo-as iguais a 0 e resolvendo-se o sistema para as 4 variáveis restantes.
Aplicando-se esta regra, obtemos as 15 soluções básicas:

nº	Não básicas	Básicas	Condição	Z
1	$x_1 = 0\, x_2 = 0$	$F_1 = 4900\, F_2 = 4500\, F_3 = 80\, F_4 = 180$	Praticável	0
2	$x_1 = 0 F_1 = 0$	$x_2 = 70\, F_2 = 1000\, F_3 = 80\, F_4 = -30$	Impraticável	–
3	$x_1 = 0\, F_2 = 0$	$x_2 = 90\, F_3 = 80\, F_4 = -90\, F_1 = -1400$	Impraticável	–
4	$x_1 = 0\, F_3 = 0$	$0 = 80$	Impossível	–
5	$x_1 = 0\, F_4 = 0$	$F_3 = 80\, x_2 = 60\, F_1 = 700\, F_2 = 1500$	Praticável	3600
6	$x_2 = 0\, F_1 = 0$	$F_3 = -60\, F_2 = -1800\, F_4 = 180\, x_1 = 70$	Impraticável	–
7	$x_2 = 0\, F_2 = 0$	$F_3 = -20\, F_1 = 1400\, x_1 = 50\, F_4 = 180$	Impraticável	–
8	$x_2 = 0\, F_3 = 0$	$F_1 = 2100\, F_2 = 900\, x_1 = 40\, F_4 = 180$	Praticável	800
9	$x_2 = 0\, F_4 = 0$	$0 = 180$	Impossível	–
10	$F_1 = 0\, F_2 = 0$	$x_1 = 25\, x_2 = 45\, F_3 = 30\, F_4 = 45$	Praticável	3200
11	$F_1 = 0\, F_3 = 0$	$x_1 = 40\, x_2 = 30\, F_2 = -600\, F_4 = 90$	Impraticável	–
12	$F_1 = 0\, F_4 = 0$	$x_1 = 10\, x_2 = 60\, F_3 = 60\, F_2 = 600$	Praticável	3800
13	$F_2 = 0\, F_3 = 0$	$x_1 = 40\, x_2 = 18\, F_1 = 840\, F_4 = 126$	Praticável	1880
14	$F_2 = 0\, F_4 = 0$	$x_1 = 16.7\, x_2 = 60\, F_3 = 46.7\, F_1 = -466.6$	Impraticável	–
15	$F_3 = 0\, F_4 = 0$	$x_1 = 40\, x_2 = 60\, F_1 = -2100\, F_2 = -2100$	Impraticável	–

Podemos observar na solução gráfica cada uma das 15 soluções básicas. Como o modelo é de 2 variáveis de decisão (x_1, x_2), cada solução básica é a intersecção de 2 restrições. Podemos inclusive observar que 2 das soluções (4 e 9) são a intersecção de 2 paralelas que se interceptam no infinito.



Como podemos observar, a solução básica nº 12 é a solução ótima (como vimos na solução gráfica). Terá sido simples coincidência o fato da solução ótima ser uma das soluções básicas ? Não é simples coincidência pois pode-se provar que:

> **Se um modelo de Programação linear possui uma única solução ótima, então ela é uma solução básica do sistema de equações lineares formado pelas restrições do modelo acrescidas das suas respectivas variáveis de folga.**

No gráfico podemos observar que a solução ótima só pode ser um dos vértices (pontos extremos) do espaço solução pois eles são justamente as soluções básicas praticáveis. Isto vem do fato de que o espaço solução é sempre um conjunto convexo onde cada solução básica é a intersecção de tantas restrições quantas forem as variáveis de decisão do modelo (duas, x_1 e x_2 no nosso caso).

> **No caso de termos mais de uma solução ótima, teremos sempre um nº infinito de soluções ótimas pois serão ótimos todos os pontos que unem 2 vértices (pontos extremos) adjacentes, ou seja, todos os pontos de um dos lados do espaço solução.**

Os 2 postulados acima nos levam a conclusão de que um modelo de programação linear só pode ter 2 tipos de soluções ótimas: ou ela é única, ou seja, um único ponto, ou tem um número infinito de pontos ótimos. Assim, é impossível existir um modelo de programação linear que tenha, por exemplo, 5 soluções ótimas.
Com o que já vimos, parece que para achar a solução ótima de um modelo de Programação Linear basta encontrar as soluções básicas do sistema de equações lineares formado pelas suas restrições, e escolher a melhor, em função do objetivo, dentre as praticáveis.
Um exemplo, no entanto, nos mostra que este método é totalmente impraticável. Vamos supor que temos um modelo com 50 restrições e 100 variáveis. É importante ressaltar que um modelo deste tamanho é apenas um modelo de programação linear de tamanho de pequeno para médio. Quantas soluções básicas teríamos que encontrar ?
$\dfrac{100!}{50!50!} = 10^{29}$, levaria-se anos mesmo usando-se os computadores mais velozes.
Veremos a seguir que o método simplex examina apenas um nº muito pequeno destas soluções básicas para encontrar a solução ótima.
Vamos ver mais uma definição:
Solução básica praticável adjacente: Duas soluções básicas praticáveis são adjacentes se elas diferem por apenas **uma variável não básica** (óbviamente, como o total de varáveis é a soma das não básicas com as básicas, elas diferem também por uma variável básica).
Assim, as soluções básicas a seguir, são adjacentes:

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} F_1 = 4900 \\ F_2 = 4500 \\ F_3 = 80 \\ F_4 = 180 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} F_1 = 2100 \\ F_2 = 900 \\ x_1 = 40 \\ F_4 = 180 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{l} F_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

O nº de soluções básicas praticáveis adjacentes à cada solução básica é igual ao número de variáveis de decisão do modelo (duas, x_1 e x_2 no nosso caso). Assim, como pode ser visto no gráfico onde são mostradas as soluções básicas, a solução nº 1 tem duas adjacentes: a nº 5 e a nº 8.

O Simplex está baseado na seguinte propriedade, cuja prova não mostraremos aqui mas que pode ser encontrada em diversos textos:

> **Se uma solução básica é melhor que as suas adjacentes, então ela é a solução ótima.**

Com base nesta propriedade podemos definir as etapas básicas do método Simplex:

1. Obter uma solução básica praticável inicial. Esta solução é obtida fazendo-se as variáveis de decisão como variáveis não básicas, ou seja, iguais a 0. As variáveis básicas serão as variáveis de folga.

2. Dada uma solução básica testar se ela é melhor que suas adjacentes. Se for, é a solução ótima.

3. Se não for ir para a melhor solução básica adjacente e voltar a etapa 2.

Vamos aplicar então o simplex ao nosso exemplo:

(MAX) $Z = 20x_1 + 60x_2$

s.a.

$70x_1 + 70x_2 \leq 4900$

$90x_1 + 50x_2 \leq 4500$

$2x_1 \leq 80$

$3x_2 \leq 180$

$x_1, x_2 \geq 0$

Vamos introduzir as variáveis de folga e numerar as equações:

(0) $Z - 20x_1 - 60x_2 = 0$

(1) $70x_1 + 70x_2 + F_1 = 4900$

(2) $90x_1 + 50x_2 + F_2 = 4500$

(3) $2x_1 + F_3 = 80$

(4) $3x_2 + F_4 = 180$

Esta forma de um modelo de P.Linear (na verdade um sistema de equações lineares) é chamada de forma padrão (standard). Todas as equações são de igualdade e todas as constantes do lado direito são ≥ 0.

Como vemos temos um sistema de equações lineares com 5 equações e 7 variáveis. Cada solução básica terá $7 - 5 = 2$ variáveis não básicas iguais a 0. O valor das 5 restantes é obtido da resolução do sistema de equações lineares depois de se zerar as variáveis não básicas. No simplex a solução básica inicial é obtida fazendo-se como variáveis não básicas (iguais a 0) as variáveis de decisão (x_1 e x_2 no nosso caso). Assim, a solução básica inicial é:

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} F_1 = 4900 \\ F_2 = 4500 \\ F_3 = 80 \\ F_4 = 180 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$Z = 0$$

Embora Z seja uma variável básica, ela é colocada fora do “colchete” de variáveis básicas. Veremos mais adiante porque.

Olhando agora com mais atenção podemos reparar em mais uma característica da forma padrão: variável básica só aparece uma única vez, ou seja, em uma única equação com coeficiente igual a 1. Qual a vantagem disto ? A vantagem é que ao se eliminar as variáveis não básicas (porque são iguais a zero), obtemos, diretamente, o valor numérico das variáveis básicas.
Durante o simplex, nas sucessivas soluções básicas que serão obtidas, trabalharemos sempre usando esta forma padrão para aproveitar esta propriedade.
Como temos uma solução básica, temos que testar se ela é a solução ótima. Para ser a ótima ela tem que ser melhor que as suas adjacentes.
Estudando a solução básica em questão, vemos que ela tem 2 adjacentes: uma em que x_1 sairia do "time" de não básicas (óbviamente uma básica teria que sair do time de básicas) e outra em que x_2 sairia do time de não básicas.
É importante entender que, por exemplo, x_1 sair do time de não básicas, ou seja das iguais a zero, implica em ela se tornar básica, ou seja, maior que 0 (vamos ignorar aqui o fato de que, excepcionalmente, ela pode ser degenerada).
Vamos escrever a função objetivo em função das variáveis de decisão:
(0) $Z = 20x_1 + 60x_2$
O que observamos é que se x_1 se tornar básica o valor de Z vai aumentar (20 unidades por unidade de x_1), ou seja vai melhorar a função objetivo. Isto mostra que a adjacente à atual solução básica, ou seja aquela em que x_1 é básica é melhor que a solução atual. Podemos afirmar então, que a atual solução não é ótima pois pelo menos uma adjacente é melhor.
Vamos examinar se a outra adjacente, ou seja aquela em x_2 vai se tornar básica também melhora o valor da função objetivo. Como podemos ver acima, para cada unidade que x_2 assuma, a função objetivo aumenta de 60 unidades. Esta adjacente também é melhor que a solução atual!
A etapa 2 do método simplex diz que se a atual solução básica não é ótima, deve-se ir para a melhor adjacente. Matemáticamente é impossível saber, a não ser em problemas pequenos, qual a melhor adjacente. O que na verdade nós fazemos, é ir para aquela adjacente que aparenta dar o maior ganho para o valor de Z. No nosso caso a melhor adjacente aparente é aquela em que x_2 passaria a ser básica pois para cada unidade de x_2, temos um aumento de 60 em Z contra um aumento de 20 no caso de x_1.
É importante deixar claro que o método simplex funciona, ou seja vai levar-nos a solução ótima, independente da escolha a ser feita. A razão de termos escolhido a que aparenta dar maior ganho prende-se unicamente ao desejo de se fazer, principalmente quando se trabalha manualmente, o mínimo de iterações. Via de regra, embora não obrigatoriamente, quando se escolhe a que dá maior ganho este desejo é atendido.
Escolhemos então x_2 como a variável que vai se tornar básica ou, em outras palavras, a variável que vai **entrar** na base. Ela é chamada de **variável entrante**.
Resumindo temos:
Candidatas à variável entrante (são sempre as não básicas): x_1 e x_2.
Variável entrante: x_2

Como x_2 vai entrar na base, ou seja se tornar básica, uma das atuais variáveis básicas vai ter que deixar de ser básica ou em outras palavras, **sair** da base. Esta variável é chamada de **variável sainte.**
As candidatas à variável sainte (sempre as variáveis básicas) são: F_1, F_2, F_3 e F_4.
Neste ponto fica claro porque não colocamos Z no "colchete" das variáveis básicas. Mesmo sendo uma variável básica, Z nunca é levada em conta como candidata à variável sainte pois ela é o objetivo. Não teria sentido tirá-la da base, transformando-a em variável não básica igual a 0.
Como escolher a variável sainte ? Vamos escrever as restrições em função das candidatas a variável sainte:
(1) $F_1 = 4900 - 70x_1 - 70x_2$
(2) $F_2 = 4500 - 90x_1 - 50x_2$
(3) $F_3 = 80 - 2x_1$
(4) $F_4 = 180 - 3x_2$
Na análise que vamos fazer podemos eliminar x_1. Porque ? porque x_1 é variável não básica e não é a "entrante", ou seja vai permanecer como não básica, igual a 0.
Temos então:
(1) $F_1 = 4900 - 70x_2$
(2) $F_2 = 4500 - 50x_2$
(3) $F_3 = 80$
(4) $F_4 = 180 - 3x_2$
Neste momento, temos que ter atenção em 2 pontos: o 1º é que estamos trabalhando em um sistema de equações lineares e, obviamente, o valor de cada variável está relacionado ao valor das demais variáveis. O 2º é que, como vimos anteriormente, todas as variáveis (exceto Z) só podem ser ≥ 0. Em outras palavras a única variável que pode assumir valores negativos é Z.
Como x_2 é a variável entrante e cada unidade que ela assumir vai aumentar o Z em 60, queremos que x_2 assuma o maior valor possível. No entanto este valor está condicionado a que nenhuma outra variável se torne negativa. Na equação (1) acima, vemos que x_2 pode ir até 70 antes que F_1 se torne negativa. Já na equação (2), x_2 só pode ir até 90 pois, acima disto, F_2 se tornaria negativa. Pela equação (3) poderíamos levar x_2 até o ∞. Finalmente na (4) observamos que x_2 poderia ir até 60.
A equação (4) é que limita o valor máximo de x_2, ou seja x_2 não pode passar de 60 pois quando ela atinge este valor, F_4 chega a zero.
Como F_4 foi a variável que chegou a zero primeiro quando tentávamos atribuir o maior valor possível para x_2 (a entrante), ela será a variável sainte.
Já temos então o time de variáveis básicas e não básicas da solução básica adjacente melhor do que a que acabamos de testar. Teremos:

$$\mathbf{VB}\left\{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ x_2 \end{matrix}\right\} \quad \mathbf{VNB}\left\{\begin{matrix} x_1 = 0 \\ F_4 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Em um modelo pequeno como o que estamos aplicando o simplex, poderá ser tentador se obter o valor numérico das variáveis básicas por simples substituição. Em

modelos maiores este procedimento tornaria inviável a obtenção da solução ótima. Por esta razão o simplex passa de uma solução básica para outra mantendo a estrutura padrão que vimos anteriormente ou seja, variável básica aparecendo uma única vez, no sistema de equações lineares, com coeficiente igual a 1.
Como x_2, a entrante, vai substituir F_4, a sainte, como variável básica, temos que construir um sistema linear equivalente em que x_2 apareça em uma única equação com coeficiente igual a 1 e não apareça nas demais equações, ou seja tenha coeficiente igual a zero.
Em que equação x_2 vai aparecer com coeficiente igual 1 ? Naquela em que F_4, a sainte, aparecia com coeficiente igual a 1, ou seja a equação (4). Como fazer com que o coeficiente de x_2 seja igual a 1 ? Basta dividir ambos os lados da equação por 3, obtendo:
(4) $x_2 + \frac{1}{3}F_4 = 60$
Como eliminar x_2, ou seja fazer seu coeficiente igual a 0, da equação (0) ? Podemos usar 2 procedimentos: o 1º é tirar o valor de x_2 da nova equação (4) e substituir na equação (0); o 2º, mais "elegante", é aplicar a propriedade dos sistemas de equações lineares que diz que um sistema não se altera quando somamos (ou subtraímos) à uma equação uma outra multiplicada por uma constante.
Podemos então multiplicar a nova equação (4) por 60 e somar a equação (0), obtendo:

$$\begin{array}{rl} Z - 20x_1 - 60x_2 = 0 & \\ 60x_2 + 20F_4 = 3600 & + \\ \hline Z - 20x_1 + 20F_4 = 3600 & \end{array}$$

Para eliminar x_2 da equação (1) usamos o mesmo procedimento, ou seja multiplicamos a nova equação (4) por -70 e somamos a equação (1), obtendo:

$$\begin{array}{rl} 70x_1 + 70x_2 + F_1 = 4900 & \\ -70x_2 - \frac{70}{3}F_4 = -4200 & + \\ \hline 70x_1 + F_1 - \frac{70}{3}F_4 = 700 & \end{array}$$

Processo semelhante para eliminarmos x_2 da equação (2). Multiplicamos a nova (4) por -50 e somamos a equação (2), obtendo:

$$\begin{array}{rl} 90x_1 + 50x_2 + F_2 = 4500 & \\ -50x_2 - \frac{50}{3}F_4 = -3000 & + \\ \hline 90x_1 + F_2 - \frac{50}{3}F_4 = 1500 & \end{array}$$

Como na equação (3) o coeficiente de x_2 já é zero, não precisamos fazer qualquer transformação.
A nova solução básica é:

(0) $Z - 20x_1 + 20F_4 = 3600$

(1) $70x_1 + F_1 - \frac{70}{3}F_4 = 700$

(2) $90x_1 + F_2 - \frac{50}{3}F_4 = 1500$

(3) $2x_1 + F_3 = 80$

(4) $x_2 + \frac{1}{3}F_4 = 60$

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} F_1 = 700 \\ F_2 = 1500 \\ F_3 = 80 \\ x_2 = 60 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ F_4 = 0 \end{array}\right\}$$

$Z = 3600$

Mais uma vez podemos observar que, eliminadas as variáveis não básicas ($= 0$), obtemos, diretamente, o valor numérico das variáveis básicas.
Temos que testar se esta nova solução básica é melhor que as suas adjacentes, ou seja se ela é a ótima.
Como antes, temos 2 soluções adjacentes a esta: uma em que x_1 passaria a variável básica e outra em que F_4 voltaria ao time das básicas. Vamos analisar a equação de Z:
$Z = 3600 + 20x_1 - 20F_4$
Se x_1 passar a básica, o valor de Z, para cada unidade de x_1, aumentará de 20. Logo a atual solução não é ótima: já descobrimos uma adjacente melhor.
Vamos examinar a outra adjacente possível, ou seja aquela em que F_4 passaria a ser variável básica. Como todas as variáveis, exceto Z, tem que ser ≥ 0, qualquer valor atribuído a F_4 iria diminuir o valor de Z, logo esta alternativa é pior que a atual solução. Assim x_1 é a variável entrante.
Para escolher a sainte, vamos escrever as restrições em função das candidatas a variável sainte, ou seja as atuais variáveis básicas:

(1) $F_1 = 700 - 70x_1 + \frac{70}{3}F_4$

(2) $F_2 = 1500 - 90x_1 + \frac{50}{3}F_4$

(3) $F_3 = 80 - 2x_1$

(4) $x_2 = 60 - \frac{1}{3}F_4$

F_4 não precisa ser levada em consideração pois é não básica, não é a entrante e, portanto, vai continuar sendo igual a 0.
Na equação (1) x_1 pode ir até 10 antes de F_1 se tornar negativa. Pela equação (2), x_1 pode ir até 16,67. Na (3), x_1 pode ser levado até 40 e pela equação (4), x_1 poderia ir até o ∞.
O limite para o valor de x_1 está na equação (1), logo F_1 é a que chega a zero primeiro e será a variável sainte.
Temos que construir a nova solução básica em que x_1 vai substituir F_1 como variável básica. Assim, na equação (1), que era onde aparecia a sainte (F_1), vamos fazer com que x_1 apareça com coeficiente igual a 1, eliminando x_1 das demais equações.
Para fazer com que x_1 fique com coeficiente 1, vamos dividir, ambos os lados, a equação (1) por 70, obtendo:
(1) $x_1 + \frac{1}{70}F_1 - \frac{1}{3}F_4 = 10$
Para eliminar x_1 da equação (0) podemos tirar o valor de x_1 da nova equação (1) e substituir na equação (0) ou podemos multiplicar a nova equação (1) por 20 e somar à equação (0), obtendo:

$$Z - 20x_1 + 20F_4 = 3600$$
$$20x_1 + \frac{20}{70}F_1 - \frac{20}{3}F_4 = 200 \quad +$$

$$Z + \frac{20}{70}F_1 + \frac{40}{3}F_4 = 3800$$

Para eliminar x_1 da equação (2), podemos multiplicar a nova equação (1) por -90 e somar a eq.(2), obtendo:

$$90x_1 + F_2 - \frac{50}{3}F_4 = 1500$$
$$-90x_1 - \frac{90}{70}F_1 + 30F_4 = -900 \quad +$$

$$-\frac{90}{70}F_1 + F_2 + \frac{40}{3}F_4 = 600$$

Para eliminar x_1 da equação (3), multiplicamos a nova equação (1) por -2 e somamos a equação (3), obtendo:

$$2x_1 + F_3 = 80$$
$$-2x_1 - \frac{2}{70}F_1 + \frac{2}{3}F_4 = -20 \quad +$$

$$-\frac{2}{70}F_1 + F_3 + \frac{2}{3}F_4 = 60$$

A nova solução básica fica então como:

$$(0)\quad Z + \frac{20}{70}F_1 + \frac{40}{3}F_4 = 3800$$

$$(1)\quad x_1 + \frac{1}{70}F_1 - \frac{1}{3}F_4 = 10$$

$$(2)\quad -\frac{90}{70}F_1 + F_2 + \frac{40}{3}F_4 = 600$$

$$(3)\quad -\frac{2}{70}F_1 + F_3 + \frac{2}{3}F_4 = 60$$

$$(4)\quad x_2 + \frac{1}{3}F_4 = 60$$

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x_1 = 10 \\ F_2 = 600 \\ F_3 = 60 \\ x_2 = 60 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{l} F_1 = 0 \\ F_4 = 0 \end{array}\right\}$$

$$Z = 3800$$

Temos que testar se esta solução é a ótima. Como antes, ela tem 2 adjacentes: uma em que F_1 passaria a ser variável básica e outra em que F_4 é que seria a nova básica. Vamos examinar a equação de Z:

$$Z = 3800 - \frac{20}{70}F_1 - \frac{40}{3}F_4$$

Como F_1 e F_4 só podem assumir valores ≥ 0, tanto uma opção quanto outra iriam diminuir o valor de Z se virassem variáveis básicas. Logo, a última solução é a solução ótima e pode ser representada como:

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x_1^* = 10 \\ F_2^* = 600 \\ F_3^* = 60 \\ x_2^* = 60 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{l} F_1^* = 0 \\ F_4^* = 0 \end{array}\right\}$$

$$Z^* = 3800$$

O "*" representa o valor ótimo da variável.

2.3 Situações que podem acontecer no Método Simplex

2.3.1 Empate na escolha da variável entrante

Suponha que em um modelo cujo objetivo seja maximizar Z, tenhamos, em determinada iteração, a seguinte equação (0):

(0) $Z - 60x_1 - 60x_2 = 0$

As variáveis x_1 e x_2 são as candidatas a variável entrante e para escolher uma delas escrevemos a equação como: $Z = 60x_1 + 60x_2$.

Tanto x_1 quanto x_2 dão, por unidade, o mesmo ganho (60) para Z. Em resumo há um empate na escolha da variável entrante **e a escolha deve ser arbitrária**. Não há como prever a escolha que minimizaria o número de iterações a serem realizadas até se chegar a solução ótima.

2.3.2 Empate na escolha da variável sainte

Seja a seguinte solução básica (em um modelo de maximização):

$$(0) \quad Z - 20x_1 + 20F_4 = 3600$$

$$(1) \quad 70x_1 + F_1 - \frac{70}{3}F_4 = 700$$

$$(2) \quad 90x_1 + F_2 - \frac{50}{3}F_4 = 900$$

$$(3) \quad 2x_1 + F_3 = 80$$

$$(4) \quad x_2 + \frac{1}{3}F_4 = 60$$

$$\textbf{VB} \left\{ \begin{array}{l} F_1 = 700 \\ F_2 = 1500 \\ F_3 = 80 \\ x_2 = 60 \end{array} \right\} \quad \textbf{VNB} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ F_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$Z = 3600$$

Reescrevendo a equação (0), $Z = 3600 + 20x_1 - 20F_4$, podemos ver que x_1 é a variável entrante. Para escolher a sainte, vamos explicitar as equações em função das candidatas, que são as variáveis básicas:

$$(1) \quad F_1 = 700 - 70x_1 + \frac{70}{3}F_4$$

$$(2) \quad F_2 = 900 - 90x_1 + \frac{50}{3}F_4$$

$$(3) \quad F_3 = 80 - 2x_1$$

$$(4) \quad x_2 = 60 - \frac{1}{3}F_4$$

F_4 pode ser desconsiderada por ser não básica ($= 0$) e não é a entrante. Na 1ª podemos levar x_1 até 10, na 2ª também podemos levá-lo até 10. Na 3ª até 40 e na 4ª até ∞.

Temos então um empate na escolha da variável sainte: tanto F_1 quanto F_2 chegam a zero quando x_1 chega a 10. Aqui também **a escolha é arbitrária**, mas vamos ver o que acontece na próxima solução básica. Escolhendo, arbitrariamente, F_1 como a sainte a próxima solução fica como:

$$
\begin{aligned}
&(0) \quad Z + \frac{20}{70}F_1 + \frac{40}{3}F_4 = 3800 \\
&(1) \quad x_1 + \frac{1}{70}F_1 - \frac{1}{3}F_4 = 10 \\
&(2) \quad -\frac{90}{70}F_1 + F_2 + \frac{40}{3}F_4 = 0 \\
&(3) \quad -\frac{2}{70}F_1 + F_3 + \frac{2}{3}F_4 = 60 \\
&(4) \quad x_2 + \frac{1}{3}F_4 = 60
\end{aligned}
$$

$$
\textbf{VB} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 10 \\ F_2 = 0 \\ F_3 = 60 \\ x_2 = 60 \end{array} \right\} \quad \textbf{VNB} \left\{ \begin{array}{l} F_1 = 0 \\ F_4 = 0 \end{array} \right\}
$$

$$Z = 3800$$

Observando o conjunto de variáveis básicas notamos que uma delas, F_2 ou seja a não escolhida no empate, é uma variável básica degenerada, ou seja, igual a zero. Sempre que houver empate entre n candidatas à variável sainte, aparecerão, na próxima solução básica, $n - 1$ variáveis básicas degeneradas.
Este fato não afeta o método e, caso a solução não seja a ótima, o simplex deve ser continuado normalmente, devendo as variáveis degeneradas serem tratadas como variáveis básicas normais.

> Está provado (existem vários modelos publicados) que o empate na escolha da variável sainte, pode levar o simplex a entrar em "loop", ou seja voltar a uma solução por onde ele tenha passado. Como este fato é raríssimo, os pacotes de computador que implementam o simplex, em seu processo "default", simplesmente ignoram a possibilidade de que a solução do modelo pode levar a um "loop" infinito. A inclusão de rotinas (existem várias) para contornar este problema onera muito, em termos de tempo, a obtenção da solução ótima.

2.3.3 Não existência de variável sainte

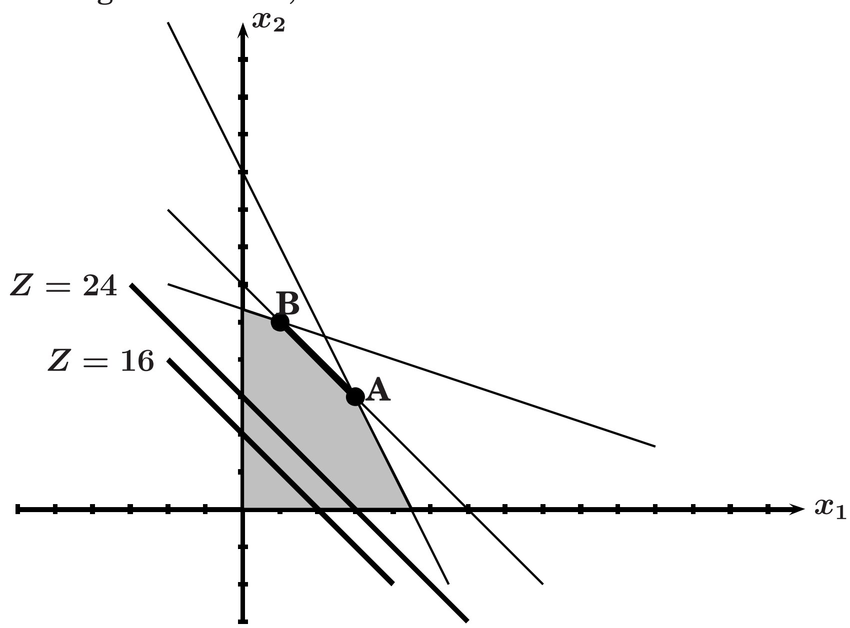
Suponha que na escolha da variável sainte temos a seguinte situação: x_1 é a variável entrante e F_1, F_2 e F_3 são as candidatas a variável sainte. As restrições, em função das candidatas a sainte são:
(1) $F_1 = 5 + x_1 + 3x_2$
(2) $F_2 = 29 - 2x_2$
(3) $F_3 = 12 + 2x_1$.
Até onde podemos levar x_1 sem tornar negativa qualquer outra variável ?
Observe que x_2 é variável não básica, não é entrante ou seja vai continuar como não básica (= 0).
Na 1ª equação o valor de x_1, que só pode ser ≥ 0, pode ir até o ∞ que F_1 não chegará a zero. Na equação (2) não aparece x_1. Logo qualquer valor que ele assumir (até o ∞) não vai influenciar o valor de F_2. Pela 3ª equação, também x_1 pode ir até o ∞ que F_3 não chegará a zero.
Como vimos, o valor de x_1 poderá ir até o ∞ que nenhuma das candidatas a variável sainte chegará a zero. Em outras palavras, não existe variável sainte. Quando temos este caso, temos um modelo com **solução ilimitada** ou seja $Z^* = \infty$ se o problema é de maximização ou $Z^* = -\infty$ se o modelo é de minimização.
No mundo real quando isto acontece é porque o modelo tem algum erro na sua formulação pois não existe objetivo igual a $\pm\infty$ na vida real.

2.3.4 Múltiplas (infinitas) soluções ótimas

Seja o seguinte modelo de Programação Linear:

$$\begin{aligned}
&\text{(MAX) } Z = 8x_1 + 8x_2 \\
&\text{s.a.} \\
&2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
&2x_1 + x_2 \leq 9 \\
&x_1 + 3x_2 \leq 16 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Resolvendo graficamente, temos:



Como as retas "Z" são paralelas a um dos lados do espaço solução, a reta de Z ótima se confunde com o próprio lado do espaço solução e todos os pontos do segmento de reta (A – B) são pontos ótimos. Como em um segmento de reta temos um nº infinito de pontos temos um nº infinito de soluções ótimas.
Como o simplex vai nos mostrar que temos infinitas soluções ótimas ? Aplicando-se o simplex ao modelo temos:

(0) $Z - 8x_1 - 8x_2 = 0$

(1) $2x_1 + 2x_2 + F_1 = 12$

(2) $2x_1 + x_2 + F_2 = 9$

(3) $x_1 + 3x_2 + F_3 = 16$

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} F_1 = 12 \\ F_2 = 9 \\ F_3 = 16 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\}$$
$Z = 0$

Variável entrante: x_1 Variável sainte: F_2
Nova solução básica:

(0) $Z - 4x_2 + 4F_2 = 36$

(1) $x_2 + F_1 - F_2 = 3$

(2) $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}F_2 = \frac{9}{2}$

(3) $\frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{2}F_2 + F_3 = \frac{23}{2}$

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} F_1 = 3 \\ x_1 = \frac{9}{2} \\ F_3 = \frac{23}{2} \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ F_2 = 0 \end{array}\right\}$$
$Z = 36$

Variável entrante: x_2 Variável sainte: F_1
Nova solução básica:

(0) $Z + 4F_1 = 48$

(1) $x_2 + F_1 - F_2 = 3$

(2) $x_1 - \frac{1}{2}F_1 + F_2 = 3$

(3) $-\frac{5}{2}F_1 + 2F_2 + F_3 = 4$

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x_2^* = 3 \\ x_1^* = 3 \\ F_3^* = 4 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{l} F_1^* = 0 \\ F_2^* = 0 \end{array}\right\}$$
$Z = 48$

A solução é ótima e é o ponto **A** do gráfico, ou seja um dos extremos do segmento de reta ótimo.

Como o simplex nos indica que o modelo tem infinitas soluções ótimas ? Se observarmos a equação de Z ótima, $Z + 4F_1 = 48$, podemos observar que ela tem uma característica incomum: uma variável não básica, F_2, não aparece, ou seja tem coeficiente igual a 0, na equação. O fato de uma, ou mais, variáveis não básicas não aparecerem (coeficiente igual a 0) na equação (0) da solução ótima, indica que o modelo tem infinita soluções ótimas. Como obtê-las ?
Podemos fazer com que F_2, a variável não básica que não aparece na equação de Z, seja variável entrante. Como o seu coeficiente é igual a 0, ela não vai alterar o valor ótimo de Z.
Escolhemos a variável sainte pelo processo normal e obtemos:
Variável entrante: F_2 Variável sainte: F_3
Nova solução básica:

$$
\begin{aligned}
&(0) \quad Z + 4F_1 = 48 \\
&(1) \quad x_2 - \frac{1}{4}F_1 + \frac{1}{2}F_3 = 5 \\
&(2) \quad x_1 + \frac{3}{4}F_1 - \frac{1}{2}F_3 = 1 \\
&(3) \quad -\frac{5}{4}F_1 + F_2 + \frac{1}{2}F_3 = 2
\end{aligned}
$$

$$
\textbf{VB} \left\{ \begin{array}{l} x_2^* = 5 \\ x_1^* = 1 \\ F_2^* = 2 \end{array} \right\} \qquad \textbf{VNB} \left\{ \begin{array}{l} F_1^* = 0 \\ F_3^* = 0 \end{array} \right\}
$$

$$Z = 48$$

A nova solução, que também é ótima, é o ponto **B** do gráfico, ou seja o outro extremo do segmento de reta.
Como o nosso modelo é um modelo de 2 variáveis de decisão (x_1 e x_2), o "lado" do espaço solução é um segmento de reta. Para se definir qualquer ponto de um segmento de reta precisamos de 2 pontos do segmento. O simplex nos deu os 2 pontos: A:(3,3) e B:(1,5). Como definir genericamente um ponto (a,b) do segmento de reta limitado pelos pontos (3,3) e (1,5) ?
Cada ponto ótimo $(a, b)^*$ deve obedecer a:

$$
\left\{ \begin{array}{l} (a, b)^* = \alpha_1(3, 3) + \alpha_2(1, 5) \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \end{array} \right.
$$

Generalizando, se temos n pontos ótimos $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, devemos ter:

$$
\left\{ \begin{array}{l} (a, b, \ldots, n)^* = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1 \\ \alpha_i \geq 0 \end{array} \right.
$$

Resumindo, em um modelo de P.Linear com n variáveis de decisão e múltiplas (infinitas) soluções ótimas temos que encontrar pelo Simplex n pontos ótimos. Qualquer combinação linear destes n pontos será também um ponto ótimo pois será um dos pontos do lado "ótimo" do espaço solução.

2.3.5 Modelos de Minimização

Seja o seguinte modelo de programação linear:

(MIN) $Z = 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4$

s.a.

$$x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 46$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

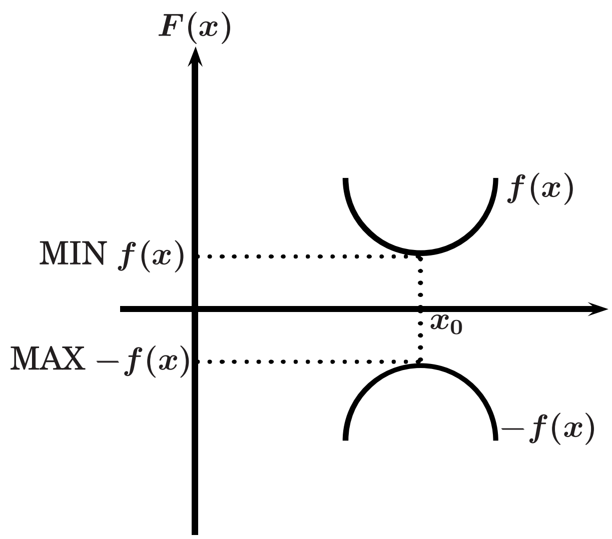
Este é um modelo de minimização. O que muda no simplex quando o modelo é de minimização ?

Muda o critério de escolha da variável entrante: Será aquela que causar, por unidade, a maior diminuição no valor da função objetivo (Z).

Muda o critério de parada: A solução será ótima quando nenhuma das candidatas à variável entrante diminuir o valor da função objetivo (Z) se ela passar a ser básica (entrante).

Não muda o critério da escolha da variável sainte: Continua sendo o mesmo.

Se for desejável, é possível trabalhar somente com maximização no Simplex. Para tanto, basta observar o gráfico a seguir:



O que podemos inferir deste gráfico, considerando que $f(x)$ e $-f(x)$ são recíprocas ? O valor do mínimo de $f(x)$ é igual, em valor absoluto, ao valor do máximo de $-f(x)$. Também podemos observar que o valor, x_0, que minimiza $f(x)$ e que maximiza $-f(x)$ é o mesmo. Assim sendo, se quisermos achar o mínimo de $f(x)$, podemos multiplicar por -1 e achar o máximo de $-f(x)$.

No simplex podemos fazer a mesma coisa, qual seja multiplicar a função objetivo por -1 e resolver por maximização. Quando tivermos a solução ótima do problema de maximização basta multiplicar o valor ótimo de Z por -1 para ter a solução do modelo de minimização. Os valores das variáveis é o mesmo para os 2 problemas.

Exercício: Resolver o modelo acima por minimização e por maximização.

Resposta: $Z^* = -16$

2.3.6 Modelos com variáveis irrestritas em sinal

Como definido anteriormente, variáveis irrestritas em sinal são variáveis que podem assumir qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$.
Seja o modelo a seguir:

$$
\begin{aligned}
&(\text{MIN})\ Z = 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4\\
&\text{s.a.}\\
&x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 46\\
&3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8\\
&2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 10\\
&x_1, x_3, x_4 \geq 0\\
&x_2 \Rightarrow \text{irrestrita em sinal}
\end{aligned}
$$

O Método Simplex não admite variáveis negativas, por esta razão é impossível trabalhar com o modelo acima sem transformá-lo. Como resolver o problema ? Simplesmente lembrando que qualquer quantidade negativa pode ser representada como a diferença de 2 quantidades positivas. Assim, por exemplo, -4 pode ser a diferença entre $+6$ e $+10$. Aplicando esta dedução ao nosso modelo, substituímos x_2 pela diferença de 2 variáveis ≥ 0 em todo lugar onde x_2 apareça.
Vamos fazer $x_2 = x_5 - x_6$. Nosso modelo fica então como:

$$
\begin{aligned}
&(\text{MIN})\ Z = 3x_1 + 6x_5 - 6x_6 - 2x_3 + 4x_4\\
&\text{s.a.}\\
&x_1 + 7x_5 - 7x_6 + 3x_3 + 7x_4 \leq 46\\
&3x_1 - x_5 + x_6 + x_3 + 2x_4 \leq 8\\
&2x_1 + 3x_5 - 3x_6 - x_3 + x_4 \leq 10\\
&x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Na solução ótima para se obter o valor ótimo de x_2 fazemos:
$x_2^* = x_5^* - x_6^*$
Exercício: Resolver o modelo acima.
Resposta: $Z^* = -48 \quad x_2^* = -8$

Não devemos confundir uma variável irrestrita em sinal com uma variável, por exemplo x_3, para a qual exista uma restrição do tipo $x_3 \geq -4$. Como esta variável pode assumir alguns valores negativos, o que não é permitido no simplex, temos que fazer uma substituição. Para isto criamos uma variável não existente no modelo, por exemplo x_5, e fazemos com que x_5 seja igual a $x_3 + 4$. Temos então $x_3 = x_5 - 4$. Substituímos, no modelo, cada x_3 por $x_5 - 4$, considerando $x_5 \geq 0$. Resolvemos o simplex e o valor ótimo de x_3^* será igual $x_5^* - 4$

2.4 Outras formas de modelos - O Simplex de 2 fases

Seja o seguinte modelo de programação linear:

(MAX) $Z = 4x_1 + 3x_2$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 40$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_2 \geq 0$$

Vamos resolver este modelo pelo simplex. Podemos escrever a equação de Z como:

(0) $Z - 4x_1 - 3x_2 = 0$

A 1ª restrição tem uma particularidade: ela é uma igualdade ! Sendo uma igualdade, ela não tem folga. Do ponto de vista do problema físico, este fato é lógico pois a restrição tem que ser satisfeita na igualdade. No entanto, para fazer o simplex, este fato causa um problema pois as variáveis de folga são as variáveis básicas da solução básica inicial do simplex.

Como precisamos de uma variável para ser a básica inicial, vamos criar uma variável. Estas variáveis, por não terem qualquer significado com o problema em si, são na verdade um artifício matemático, recebem o nome de **Variáveis Artificiais**. Vamos rotular as variáveis artificiais como A_i onde, por exemplo, A_3 vai representar a variável artificial colocada na restrição 3.

Podemos então introduzir a variável artificial na nossa restrição, obtendo:

(1) $x_1 + 2x_2 + A_1 = 10$

Na 2ª restrição, que tem o sinal $\leq$, podemos colocar a variável de folga:

(2) $6x_1 + 6x_2 + F_2 = 40$

Na 3ª restrição o sinal é do tipo $\geq$. Aqui não temos folga e sim uma eventual sobra se a restrição não for atendida na igualdade. Como todas as variáveis, exceto Z tem que ser ≥ 0, temos que colocar uma variável de folga com sinal $-$ para transformar a inequação em equação. Temos então:

(3) $x_1 - F_3 = 2$

Aqui temos outro problema para o simplex: F_3 não pode ser usada como variável básica inicial pois o seu valor seria igual a -2, o que o simplex não permite. Assim, para ser uma variável básica inicial, vamos introduzir também uma outra variável artificial, obtendo:

(3) $x_1 - F_3 + A_3 = 2$

O nosso sistema de equações lineares tem então a seguinte aparência:

(0) $Z - 4x_1 - 3x_2 = 0$

(1) $x_1 + 2x_2 + A_1 = 10$

(2) $6x_1 + 6x_2 + F_2 = 40$

(3) $x_1 - F_3 + A_3 = 2$

Temos no sistema 2 variáveis artificiais: A_1 e A_3. Como são artificiais, qual o valor que se espera que estas variáveis tenham na solução ótima ? **ZERO !**

Se aplicarmos diretamente o simplex sobre o sistema acima, não teremos nenhuma garantia de que as variáveis artificiais serão iguais a 0 na solução ótima.

Na verdade um valor diferente de zero para qualquer destas variáveis indicaria que o modelo não tem solução praticável pois qualquer valor ($\neq 0$) para uma variável artificial indicaria uma solução impraticável.
Para resolver isto vamos dividir o simplex em 2 fases: Na primeira vamos abandonar, provisoriamente, a função objetivo original e criar uma outra função objetivo, que chamaremos de W, visando minimizar o somatório das variáveis artificiais. Se a função objetivo ótima desta primeira fase for igual a zero, o modelo tem solução pois as variáveis artificiais foram zeradas e podemos então partir para a 2ª fase que objetivará otimizar a função objetivo original.
Voltando ao nosso exemplo, podemos criar a função objetivo da fase I que será: (MIN) $W = A_1 + A_3$ que, como já vimos, é equivalente a (MAX) $W = -A_1 - A_3$. Esta transformação de minimização em maximização não é obrigatória e, obviamente, poderíamos trabalhar com minimização.
O sistema de equações lineares fica como:
(0) $W + A_1 + A_3 = 0$
(1) $x_1 + 2x_2 + A_1 = 10$
(2) $6x_1 + 6x_2 + F_2 = 40$
(3) $x_1 - F_3 + A_3 = 2$
Neste ponto devemos observar que as variáveis A_1 e A_2 foram criadas para serem as variáveis básicas iniciais. Pela estrutura utilizada no simplex, variáveis básicas só devem aparecer uma única vez com coeficiente igual a 1. Como podemos ver acima, A_1 e A_3 estão aparecendo, indevidamente, na equação (0). Assim, antes de começar o simplex temos que eliminá-las de lá. Mais uma vez, temos 2 formas de fazer isto: obter os valores de A_1 e A_3 das equações (1) e (3) e substituir na equação (0) ou multiplicar as equações (1) e (3) por -1 e somá-las à equação (0), obtendo:

$$\begin{array}{rl} W + A_1 + A_3 = 0 & \\ -x_1 - 2x_2 - A_1 = -10 & + \\ -x_1 + F_3 - A_3 = -2 & \\ \hline W - 2x_1 - 2x_2 + F_3 = -12 & \end{array}$$

A solução básica inicial fica então como:
(0) $W - 2x_1 - 2x_2 + F_3 = -12$
(1) $x_1 + 2x_2 + A_1 = 10$
(2) $6x_1 + 6x_2 + F_2 = 40$
(3) $x_1 - F_3 + A_3 = 2$

$$\mathbf{VB}\left\{\begin{array}{l} A_1 = 10 \\ F_2 = 40 \\ A_3 = 2 \end{array}\right\} \quad \mathbf{VNB}\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ F_3 = 0 \end{array}\right\}$$
$$W = -12$$

Lembrando que o objetivo é maximizar o valor de W, encontramos:
Variável entrante: x_1 Variável sainte: A_3

Nova solução básica:

(0) $W - 2x_2 - F_3 + 2A_3 = -8$

(1) $2x_2 + F_3 + A_1 - A_3 = 8$

(2) $6x_2 + F_2 + 6F_3 - 6A_3 = 28$

(3) $x_1 - F_3 + A_3 = 2$

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{c} A_1 = 8 \\ F_2 = 28 \\ x_1 = 2 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{c} A_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ F_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$W = -8$

Variável entrante: x_2 Variável sainte: A_1

Nova solução básica:

(0) $W + A_1 + A_3 = 0$

(1) $x_2 + \frac{1}{2}F_3 + \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_3 = 4$

(2) $F_2 + 3F_3 - 3A_1 - 3A_3 = 4$

(3) $x_1 - F_3 + A_3 = 2$

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{c} x_2 = 4 \\ F_2 = 4 \\ x_1 = 2 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{c} A_3 = 0 \\ A_1 = 0 \\ F_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$W = 0$

Chegamos ao ótimo da fase I e o valor de W é zero ou seja conseguimos levar a zero as variáveis artificiais.

Se no ótimo da fase I o valor ótimo de W é diferente de zero, ou seja o valor ótimo de uma ou mais variáveis artificiais é diferente de 0, significa que o modelo **não tem solução praticável**. Quando isto acontece é porque não existe nenhum ponto que satisfaça a todas as restrições ou, em outras palavras, **o espaço solução é o conjunto vazio**.

Como este não foi o caso do nosso exemplo, podemos passar para a fase II. Para fazer isto, eliminamos a equação de W e todas as variáveis artificiais. Trazemos de volta a função objetivo original, ficando nosso sistema como:

(0) $Z - 4x_1 - 3x_2 = 0$

(1) $x_2 + \frac{1}{2}F_3 = 4$

(2) $F_2 + 3F_3 = 4$

(3) $x_1 - F_3 = 2$

Como x_1 e x_2 são variáveis básicas, elas tem que ser eliminadas da equação de Z.

Podemos tirar o valor de x_1 da equação (3) e de x_2 da equação (1) e substituir na equação (0). Podemos também multiplicar as equações (1) e (3) por 3 e 4 e somar a equação de Z. Temos então:

$$
\begin{array}{r}
Z - 4x_1 - 3x_2 = 0 \\
3x_2 + \frac{3}{2}F_3 = 12 \quad + \\
4x_1 - 4F_3 = 8 \\
\hline
Z - \frac{5}{2}F_3 = 20
\end{array}
$$

A solução básica inicial da fase II fica como:

(0) $Z - \frac{5}{2}F_3 = 20$

(1) $x_2 + \frac{1}{2}F_3 = 4$

(2) $F_2 + 3F_3 = 4$

(3) $x_1 - F_3 = 2$

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x_2 = 4 \\ F_2 = 4 \\ x_1 = 2 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{ F_3 = 0 \right\}$$

$Z = 20$

Lembrando que o objetivo é maximizar o valor de Z, temos:
Variável entrante: F_3 Variável sainte: F_2
A nova solução básica fica como:

(0) $Z + \frac{5}{6}F_2 = \frac{70}{3}$

(1) $x_2 - \frac{1}{6}F_2 = \frac{10}{3}$

(2) $\frac{1}{3}F_2 + F_3 = \frac{4}{3}$

(3) $x_1 + \frac{1}{3}F_2 = \frac{10}{3}$

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x_2^* = \frac{10}{3} \\ F_3^* = \frac{4}{3} \\ x_1^* = \frac{10}{3} \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{ F_2^* = 0 \right\}$$

$Z^* = \frac{70}{3}$ A solução é ótima !

2.5 Novos algorítimos

O método Simplex foi desde 1947 (ano em que Dantzig o apresentou) até o final da década de 1970 o único algorítimo prático para a resolução de modelos de P.Linear. Todos os programas-pacotes, profissionais, para a resolução de modelos de P.Linear o utilizam apenas incorporando rotinas e artifícios visando diminuir o tempo de processamento e reduzir os erros de arredondamento inerentes aos cálculos efetuados em computador.

Em 1979, no entanto, o matemático russo L.G. Khachian publicou um artigo (Khachian, L. G. 1979. "A Polynomial Algorithm in Linear Programming." Soviet Mathematics Doklady, Vol. 20: 191-194) apresentando um algorítimo alternativo para o Simplex. Embora tenha tido grande repercussão (a notícia, na época, saiu nos principais jornais do mundo, inclusive no Brasil) o algorítimo, de grande significado teórico, não teve nenhuma repercussão prática pois as soluções ótimas demoram muito mais tempo para serem encontradas do que usando-se o Simplex.

O Trabalho de Khachian levou, no entanto, a que numerosos pesquisadores tentassem caminhos alternativos ao método daquele matemático.

Em 1984 Karmarkar, um pesquisador da AT&T Bell Laboratories, publicou um artigo (Karmakar, N. 1984. "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming." Combinatorica, Vol. 4: 45-68) apresentando um novo algorítimo que, para determinados tipos de modelos (milhares de variáveis e matrizes esparsas), tem apresentado resultados superiores (mais rápidos) que o Simplex. Já existem vários programas comerciais utilizando o algorítimo de Karmakar.

Este algorítimo, diferentemente do Simplex que pula de um ponto extremo para outro (vértices do espaço solução), é um algorítimo de "ponto-interior", ou seja, ele caminha por pontos dentro do espaço solução até chegar ao vértice ótimo. Um dos problemas desta nova abordagem é encontrar o ponto inicial do algorítimo. Este ponto tem que ser um ponto do interior do espaço solução e em modelos com milhares de variáveis e restrições, não é tarefa simples encontrá-lo.

Como não poderia deixar de ser, existe muita pesquisa em relação ao assunto (há muito dinheiro envolvido) e é certo que esta nova variante de resolução de modelos de P.Linear será aperfeiçoada.

2.6 Exercícios

A) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MAX})\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

s.a.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 22$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 \leq 7$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

B) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MAX})\ Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

s.a.

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_i \geq 0$$

C) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MAX})\ Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

s.a.

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$$

$$x_i \geq 0$$

D) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MAX})\ Z = 6x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 8x_4$$

s.a.

$$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 \geq 25$$

$$5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 \leq 20$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 10$$

$$x_i \geq 0$$

E) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MAX})\ Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

s.a.

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_3 + x_4 \leq 5$$

$$x_i \geq 0$$

F) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MAX})\ Z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_i \geq 0$$

G) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MIN})\ Z = 4x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$2x_1 + x_2 \geq 10$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_i \geq 0$$

H) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MAX})\ Z = -x_1 + 4x_2$$

s.a.

$$-3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_2 \geq -3$$

$x_1 \Rightarrow$ Irrestrita em sinal

I) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MAX})\ Z = x_1 + 2x_2 - x_3$$

s.a.

$$-2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -5$$

$$-4x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$x_1, x_2 \Rightarrow$ Irrestritas em sinal

$$x_3 \geq 0$$

J) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MAX})\ Z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4$$

s.a.

$$5x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 10$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10$$

$$x_i \geq 0$$

K) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MIN})\ Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

s.a.

$$-x_1 - 4x_2 - 2x_3 \leq -8$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_i \geq 0$$

L) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MAX})\ Z = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3$$

s.a.

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9$$

$$-5x_1 + 6x_2 + 15x_3 \leq 15$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_i \geq 0$$

M) Resolva o modelo a seguir pelo Simplex:

$$(\text{MAX})\ Z = -2x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

s.a.

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 20$$

$$-2x_1 - x_2 + 12x_3 \geq -60$$

$$x_i \geq 0$$

2.7 Respostas dos exercícios da seção 2.6

A) $x_1^* = 5\ \ x_2^* = 3\ \ Z^* = 21$

B) $x_1^* = 0\ \ x_2^* = 10\ \ x_3^* = \dfrac{20}{3}\ \ Z^* = 70$

C) $x_1^* = 15\ \ x_2^* = 5\ \ x_3^* = 0\ \ Z^* = 25$

D) Solução Ilimitada $(Z^* = \infty)$

E) Pontos ótimos obtidos pelo simplex: (2,0,5,0) (0,2,5,0) (0,2,0,5) (2,0,0,5) $Z^* = 7$
$(a, b, c, d)^* = \alpha_1(2, 0, 5, 0) + \alpha_2(0, 2, 5, 0) + \alpha_3(0, 2, 0, 5) + \alpha_4(2, 0, 0, 5)$
$\alpha_i \geq 0$
$\sum \alpha_i = 1$

F) $x_1^* = 2\ \ x_2^* = 1\ \ Z^* = 7$

G) $x_1^* = 4\ \ x_2^* = 2\ \ Z^* = 22$

H) Substitua x_1 por $(x_3 - x_4)$.
Substitua x_2 por $(x_5 - 3)$.
Aplique o simplex e substitua de volta. $x_1^* = -\dfrac{2}{7}\ \ x_2^* = \dfrac{36}{7}\ \ Z^* = \dfrac{146}{7}$

I) Substitua x_1 e x_2 pela diferença de 2 variáveis ≥ 0.
Aplique o simplex e substitua de volta.
$x_1^* = \dfrac{9}{5}\ \ x_2^* = \dfrac{7}{5}\ \ x_3^* = 0\ \ Z^* = \dfrac{23}{5}$

J) $x_1^* = \dfrac{5}{3}\ \ x_2^* = \dfrac{5}{3}\ \ x_3^* = 0\ \ x_4^* = 0\ \ Z^* = \dfrac{40}{3}$

K) $x_1^* = \dfrac{4}{5}\ \ x_2^* = \dfrac{9}{5}\ \ x_3^* = 0\ \ Z^* = 7$ (Infinitas soluções)

L) Sem solução praticável

M) $x_1^* = 0\ \ x_2^* = 0\ \ x_3^* = 5\ \ Z^* = 10$

Capítulo 3

Análise depois do Ótimo

Vimos nos capítulos anteriores como obter uma solução ótima para um modelo de P.Linear. Normalmente, em aplicações reais, somente a solução ótima não é suficiente para se ter todo tipo de informações que queremos. Assim, é comum se desejar saber o que aconteceria com a solução do modelo se um dos parâmetros sofresse algum tipo de variação. Uma alternativa óbvia seria resolver o modelo modificado e obter a nova solução ótima. Este processo no entanto é demorado e caro pois implicaria no uso, repetida vezes, do computador.
Veremos neste capítulo que, sem resolver o modelo novamente, é possível obter quase todas as informações necessárias em conseqüência de variações nos parâmetros do modelo.
Para uma melhor compreensão das técnicas usadas vamos trabalhar com o seguinte exemplo:
Uma empresa produz 3 produtos em uma de suas fábricas. Na fabricação dos 3 produtos, 3 insumos são críticos em termos de restringir a capacidade de produção possível: a mão de obra disponível, a quantidade de matéria prima e o espaço para a armazenagem das unidades produzidas. Assim, o Deptº de Produção já sabe que, para o próximo mês, a fábrica terá disponível 100 kilos de matéria prima, 360 m^2 de área para estocar as unidades produzidas e 400 homens–hora de mão de obra.
Cada unidade produzida do produto 1 consome 1 kilo de matéria prima, precisa de 6 m^2 para ser armazenada e necessita de 8 homens–hora em termos de mão de obra. Já cada unidade do produto 2 consome 2 kilos de matéria prima, necessita também de 6 m^2 para ser armazenada e envolve o uso de 4 homens–hora de mão de obra. Por sua vez, cada unidade produzida do produto 3 precisa de 2 kilos de matéria prima, 4 m^2 para ser armazenada e o trabalho equivalente a 4 homens–hora.
Reduzindo do preço de venda todos os custos diretos e indiretos, foi determinado que o lucro unitário é igual a \$4 para o produto 1, \$5 para o produto 2 e \$3 para cada unidade produzida do produto 3.
Levando em conta que o objetivo da empresa é maximizar o lucro com a produção e a venda dos 3 produtos foi formulado o seguinte modelo de P.Linear visando determinar as quantidades que deveriam ser fabricadas de cada produto no próximo mês.
Variáveis de decisão:
$x_i \Rightarrow$ nº de unidades a serem produzidas, no próximo mês, do produto $i (i = 1, 2, 3)$.

O modelo fica como:

$$(\text{MAX})\ Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

s.a

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 100 \qquad \text{(matéria prima – kilos)}$$

$$6x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 360 \qquad \text{(espaço – } m^2\text{)}$$

$$8x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 400 \qquad \text{(mão de obra – HH)}$$

$$x_i \geq 0$$

Submetido ao Simplex, a solução apresentou as seguintes soluções básicas onde **(I)** é a solução inicial e **(F)** é a solução final ou seja, a ótima:

Solução (I)

$$(0) \quad Z - 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$$

$$(1) \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + F_1 = 100$$

$$(2) \quad 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + F_2 = 360$$

$$(3) \quad 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 + F_3 = 400$$

$$\textbf{VB} \left\{ \begin{array}{l} F_1 = 100 \\ F_2 = 360 \\ F_3 = 400 \end{array} \right\} \quad \textbf{VNB} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$Z = 0$$

Variável entrante: x_2 Variável Sainte: F_1

Nova solução básica:

$$(0) \quad Z - \frac{3}{2}x_1 + 2x_3 + \frac{5}{2}F_1 = 250$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}F_1 = 50$$

$$(2) \quad 3x_1 - 2x_3 - 3F_1 + F_2 = 60$$

$$(3) \quad 6x_1 - F_1 + F_3 = 200$$

$$\textbf{VB} \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 50 \\ F_2 = 60 \\ F_3 = 200 \end{array} \right\} \quad \textbf{VNB} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ F_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$Z = 250$$

Variável entrante: x_1 Variável Sainte: F_2

Solução (F)

$$(0) \quad Z + x_3 + F_1 + \frac{1}{2}F_2 = 280$$

$$(1) \quad x_2 + \frac{4}{3}x_3 + F_1 - \frac{1}{6}F_2 = 40$$

$$(2) \quad x_1 - \frac{2}{3}x_3 - F_1 + \frac{1}{3}F_2 = 20$$

$$(3) \quad 4x_3 + 4F_1 - 2F_2 + F_3 = 80$$

$$\textbf{VB}\begin{Bmatrix} x_2^* = 40 \\ x_1^* = 20 \\ F_3^* = 80 \end{Bmatrix} \quad \textbf{VNB}\begin{Bmatrix} F_1^* = 0 \\ F_2^* = 0 \\ x_3^* = 0 \end{Bmatrix}$$

$$Z^* = 280$$

3.1 Análise de Sensibilidade

Na prática, é muito raro que se consiga determinar os parâmetros (c_j, a_{ij} e b_i) de determinado modelo com certeza absoluta. Na realidade normalmente os parâmetros do modelo são simples estimativas sujeitas a certo grau de incerteza. Em consequência deste fato é normal que se queira avaliar os efeitos de mudanças na solução ótima encontrada, se alteramos um ou mais parâmetros do modelo, logicamente sem precisar resolver o modelo novamente.

Assim a **Análise de Sensibilidade**, também chamada de Análise de Pós-Optimalidade, **é o estudo do efeito na solução ótima de alterações efetuadas nos parâmetros de determinado modelo.** Por ser demorada e cara, a análise feita resolvendo-se novamente o modelo só é adotada em último caso. As diferentes categorias de alterações que podemos analisar são:

a) Alterações nos coeficientes da função objetivo (c_j).

b) Alterações nas constantes do lado direito (b_i).

c) Alterações nos coeficientes das restrições (a_{ij}).

d) Inclusão de uma nova variável.

3.2 Análise de Sensibilidade dos Coeficientes da Função Objetivo

3.2.1 De variáveis não básicas na solução ótima

Vamos examinar, por exemplo, a variável x_3 que representa o nº de unidades a serem produzidas do produto 3.
Vamos responder a seguinte questão: Se o coeficiente de x_3 na função objetivo (lucro unitário) for menor que 3, a solução (F) continua sendo a ótima ?
Por intuição, podemos ver que a resposta para esta pergunta é sim, pois se um lucro igual a 3 não foi suficiente para tirar x_3 de zero, um lucro menor, menos ainda.
Mas se o coeficiente de x_3 for maior que 3, a solução (F) continua sendo a ótima ?
Para responder a esta pergunta podemos imaginar um coeficiente, para x_3, maior que 3 na solução inicial e, baseando-nos nas propriedades dos sistemas de equações lineares, calcular como ficaria a equação de Z (equação 0) no sistema ótimo (F).
Lembre-se que para saber se uma solução é ótima ou não, temos que examinar a equação de Z (equação 0).
Seja então $3 + \Delta$ o coeficiente de x_3 , onde $\Delta \geq 0$.
Temos então:
$(0)_I \quad Z - 4x_1 - 5x_2 - (3 + \Delta)x_3 = 0$
Podemos escrever:
$(0)_I \quad Z - 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 - \Delta x_3 = 0$
Se chamarmos $-\Delta x_3$ de k, podemos escrever:
$(0)_I \quad Z - 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 + k = 0$
Se com esta equação (0) no sistema inicial (I) aplicássemos o Simplex, como ela chegaria no sistema (F) ?
Considerando que a "variável" k só aparece na equação (0) e como durante o simplex somamos e subtraímos à equação (0) múltiplos das outras equações (restrições) nas quais k não aparece, teríamos:
$(0)_F \quad Z + x_3 + k + F_1 + \frac{1}{2}F_2 = 280$
Substituindo pelo valor de k, temos:
$(0)_F \quad Z + x_3 - \Delta x_3 + F_1 + \frac{1}{2}F_2 = 280$
$(0)_F \quad Z + (1 - \Delta)x_3 + F_1 + \frac{1}{2}F_2 = 280$
A equação acima seria a equação (0) da solução (F) se o coeficiente original de x_3 fosse $3 + \Delta$. Para esta solução continuar sendo a ótima, lembrando-nos que o modelo é de maximização, temos que garantir que:
$1 - \Delta \geq 0$
Logo temos que ter:
$\Delta \leq 1$
Se $\Delta > 1$ a solução (F) deixa de ser ótima pois x_3 será variável entrante porque seu coeficiente seria menor que zero.
Antes de prosseguirmos com a análise, vamos definir 2 valores que balizam os resultados que são obtidos na Análise de Sensibilidade:

Upper Limit (limite superior)
É o maior valor que um coeficiente pode assumir sem alterar a solução ótima.
Lower Limit (limite inferior)
É o menor valor que um coeficiente pode assumir sem alterar a solução ótima.
O Upper e o Lower limit são representados como $[LL; UL]$, ou seja entre colchetes e separados por ponto e vígula.

> **É importante observar uma premissa básica na determinação do Lower e do Upper Limit para os parâmetros de um modelo de P.Linear. Quando se diz na definição de ambos os valores "sem alterar a solução ótima", queremos dizer sem alterar o time de variáveis básicas e conseqüentemente o de variáveis não básicas. Em outras palavras se o $[LL; UL]$ é, por exemplo, $[2; 12]$, isto significa que neste intervalo fechado, o time de variáveis básicas (e não básicas) não se altera podendo, no entanto, *se alterar o valor numérico delas*.**

Assim, o lower e o upper limit para o coeficiente de x_3 na função objetivo é: $[0; 3 + \Delta]$ ou seja $[0; 4]$.
É importante observar a diferença entre o lower limit matemático e o lower limit prático. Matemáticamente, o lower limit é $-\infty$, mas como o coeficiente de x_3 representa lucro unitário, o lower limit é 0 pois o lucro unitário não deve ser menor que zero.
Outro ponto a ser observado é que o valor de Δ é igual ao coeficiente de x_3 na equação (0) do sistema ótimo (F). Na verdade, para variáveis não básicas, Δ será sempre igual àquele valor.

3.2.2 De variáveis básicas na solução ótima

Conhecendo agora o que significam o lower e o upper limit podemos fazer a seguinte pergunta: Qual o lower e o upper limit do coeficiente de x_1 na função objetivo ?
Vamos supor que o coeficiente de x_1 original seja $4 + \Delta$.
Logo a equação (0) seria:
$(0)_I \quad Z - (4 + \Delta)x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$
Separando, temos:
$(0)_I \quad Z - 4x_1 - \Delta x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$
Chamando $-\Delta x_1$ de k, temos:
$(0)_I \quad Z - 4x_1 + k - 5x_2 - 3x_3 = 0$
Como a "variável" k só aparece na equação (0) original, na solução (F) teríamos:
$(0)_F \quad Z + k + x_3 + F_1 + \frac{1}{2}F_2 = 280$
Substituindo k por $-\Delta x_1$ temos:
$(0)_F \quad Z - \Delta x_1 + x_3 + F_1 + \frac{1}{2}F_2 = 280$

Como x_1 é variável básica, temos que eliminá-la da equação (0). Para isto multiplicamos a equação (2), que é onde x_1 aparece como básica na solução (F), por Δ e somamos à equação (0), obtendo:

$$(0)_F \quad Z + \left[1 - \frac{2}{3}\Delta\right] x_3 + [1 - \Delta]\, F_1 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Delta\right] F_2 = 280 + 20\Delta$$

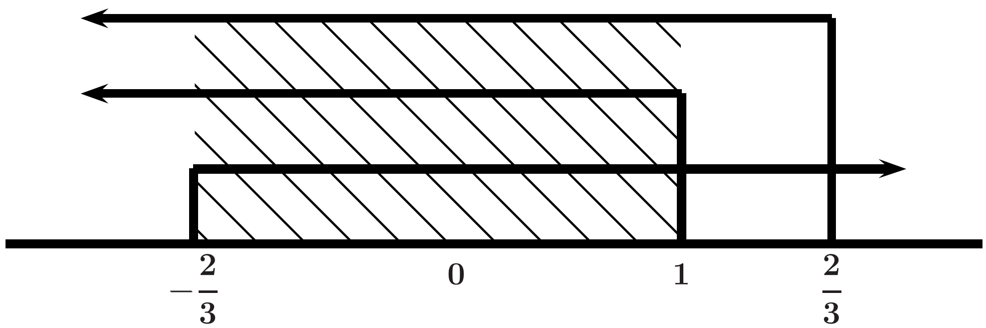
Para garantir que a solução (F) continua sendo a ótima, temos que ter todos os coeficientes ≥ 0, ou seja:

$1 - \frac{2}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq \frac{3}{2}$

$1 - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 1$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -\frac{3}{2}$

Como há superposição temos:



Assim, os valores válidos para Δ são:

$-\frac{3}{2} \leq \Delta \leq 1$

Logo para o coeficiente de x_1 na função objetivo temos:

$\left[4 - \frac{3}{2}; 4 + 1\right]$ ou $[2,5; 5]$

Se o lucro unitário do produto 1 estiver neste intervalo a solução (F) continua sendo a ótima.

Exercício: Achar o lower e o upper limit para o coeficiente de x_2 na função objetivo.

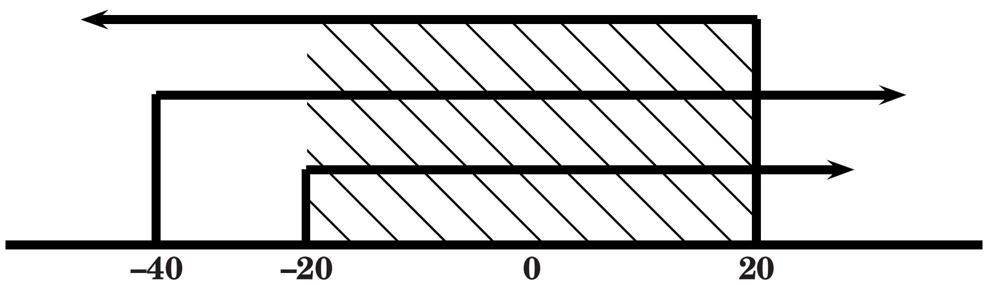
Resp: $\left[\frac{17}{4}; 8\right]$

3.3 Análise de Sensibilidade das constantes do lado direito

Neste tipo de análise queremos a responder a perguntas do tipo: Qual o lower e o upper limit da constante do lado direito da 3ª restrição, ou seja qual a faixa de variação da mão de obra (homens–hora) que mantém a solução (F) como sendo a solução ótima ?
Vamos supor que a constante do lado direito, original, da 3ª restrição seja $400 + \Delta$; onde Δ é um valor qualquer.
Temos então:
$(3)_I \quad 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 + F_3 = 400 + \Delta$
Podemos observar que Δ e a variável F_3 possuem, no sistema (I), as mesmas condições, ou seja, ambas só aparecem uma única vez, com coeficiente 1, na 3ª restrição. Em resumo tudo que acontecer, durante o simplex, com F_3 , acontecerá com Δ.
Como no sistema (F) a variável F_3 aparece exatamente da mesma forma, ou seja, somente na 3ª restrição, teremos:
$(3)_F \quad 4x_3 + 4F_1 - 2F_2 + F3 = 80 + \Delta$
Para uma solução ser ótima ela antes tem que ser praticável. Logo como os valores do lado direito representam os valores das variáveis básicas, eles tem que ser ≥ 0 pois, exceto Z, todas as variáveis tem que ser ≥ 0 para (F) continuar sendo praticável e conseqüentemente ótima. Assim, para que a solução (F) continue sendo a ótima, basta que:
$80 + \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -80$
Então para Δ temos que ter: $\quad -80 \leq \Delta \leq \infty$
Logo para a constante do lado direito da 3ª restrição temos:
$[400 - 80; 400 + \infty]$ ou $[320; \infty]$
Na verdade já sabíamos que o Upper Limit era ∞ pois na solução ótima o valor ótimo de F_3 era 80. Como F_3 representa a folga na mão de obra, o seu valor ótimo maior que zero indica que na solução ótima já não se está usando toda a mão de obra disponível. Desta forma o aumento da mão de obra disponível, de qualquer quantidade, não vai provocar qualquer alteração na solução ótima.
Vamos responder agora a mesma pergunta anterior para a constante do lado direito da 1ª restrição. Temos então:
$(1)_I \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + F_1 = 100 + \Delta$
Usando o raciocínio anterior, tudo que acontecer com F_1 acontecerá com Δ. Assim no sistema (F), teremos:

$$
\textbf{(F)} \begin{cases}
(0) \quad Z + x_3 + F_1 + \dfrac{1}{2}F_2 = 280 + \Delta \\[2ex]
(1) \quad x_2 + \dfrac{4}{3}x_3 + F_1 - \dfrac{1}{6}F_2 = 40 + \Delta \\[2ex]
(2) \quad x_1 - \dfrac{2}{3}x_3 - F_1 + \dfrac{1}{3}F_2 = 20 - \Delta \\[2ex]
(3) \quad 4x_3 + 4F_1 - 2F_2 + F_3 = 80 + 4\Delta
\end{cases}
$$

Para a solução (F) continuar sendo a ótima, todas as constantes do lado direito, exceto a da equação 0 (valor de Z), devem ser ≥ 0. Logo deveremos ter:
$40 + \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -40$
$20 - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 20$
$80 + 4\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -20$
Como há superposição temos:



Logo o valor de Δ deve ser: $-20 \leq \Delta \leq 20$
Para a constante do lado direito da 1ª restrição podemos escrever então:
$[100 - 20; 100 + 20]$ ou $[80; 120]$
Assim, se quantidade de matéria prima estiver entre 80 e 120 kilos o time de variáveis básicas ótimas e conseqüentemente o de variáveis não básicas, será o mesmo do encontrado na solução (F).
Mas se, por exemplo, o valor de Δ for igual a 10, ou seja se tivermos 110 kilos de matéria prima o valor numérico ótimo das variáveis básicas vai ser diferente pois teremos:
$Z^* = 290$
$x_2^* = 50$
$x_1^* = 10$
$F_3^* = 120$
Aqui fica evidente o conceito de upper e lower limit. Como o time de variáveis básicas (e não básicas) não se alterou, **dizemos que a solução ótima permaneceu a mesma**, mesmo tendo mudado o seu valor numérico.
Exercício: Achar o lower e o upper limit para a constante do lado direito da 2ª restrição.
Resp: $[300; 400]$

3.4 Dualidade

O termo dualidade refere-se ao fato de que cada modelo de P.Linear consiste de 2 formas. A primeira, ou original, é chamada de **primal** e a segunda forma do modelo é chamada de **dual**. Como seria esperado, as propriedades de uma das formas do modelo estão relacionadas com as propriedades da outra. Como resultado disto é possível, dada a solução ótima de uma das formas do modelo, encontrar a solução ótima da outra forma do modelo.
A solução do chamado modelo dual fornece informações significativas sobre as questões econômicas existentes em qualquer modelo de P.Linear.

3.4.1 Modelos Primal e Dual

Consideremos o seguinte par de modelos de P.Linear:

$$\begin{array}{ccc} \text{(MAX) } Z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 & & \text{(MIN) } Y = 16y_1 + 25y_2 \\ \text{s.a} & & \text{s.a} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 16 & \text{e} & y_1 + 7y_2 \geq 4 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 25 & & y_1 + 5y_2 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & 2y_1 + 3y_2 \geq 9 \\ & & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Chamaremos o 1º modelo de modelo Primal e o 2º modelo de modelo Dual. Poderíamos ter chamado o 2º de primal e aí o 1º, seria o dual.
Observando os 2 modelos, reparamos que eles são relacionados. Assim as constantes do lado direito do 1º modelo são os coeficientes da função objetivo do 2º. Os coeficientes da função objetivo do 1º modelo são as constantes do lado direito do 2º. Os coeficientes da 1ª linha do primeiro (1, 1 e 2) são os coeficientes da 1ª coluna do 2º e assim por diante.
Em resumo, fica claro que, dado um dos modelos, podemos construir o outro. Veremos mais adiante em detalhes como fazer isto, ou seja, dado um dos modelos como construir o outro.

3.4.2 Teorema Dual

Suponha que no exemplo acima x_1, x_2 e x_3 sejam valores praticáveis para o modelo primal e y_1 e y_2 sejam valores praticáveis para o modelo dual.
Se multiplicamos a 1ª restrição do primal por y_1 e a 2ª por y_2 e somamos as duas, vamos ter:
$y_1x_1 + y_1x_2 + 2y_1x_3 + 7y_2x_1 + 5y_2x_2 + 3y_2x_3 \leq 16y_1 + 25y_2$
Se, da mesma forma, multiplicarmos a iésima restrição do dual por x_i e somarmos as 3, teremos:
$x_1y_1 + 7y_2x_1 + y_1x_2 + 5y_2x_2 + 2y_1x_3 + 3y_2x_3 \geq 4x_1 + 5x_2 + 9x_3$

Como podemos observar, os lados esquerdos das 2 inequações são iguais e pode-se escrever então:

$$16y_1 + 25y_2 \geq 4x_1 + 5x_2 + 9x_3$$

ou

$$Y \geq Z$$

Este resultado implica em que o valor da função objetivo de uma solução praticável de um dos modelos é um limite para qualquer outra solução praticável do outro modelo.

Assim, por exemplo, se considerarmos a solução praticável, para o modelo primal, em que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 2$, dando um valor igual a 32 para Z e a solução praticável $y_1 = 0$ e $y_2 = 3$ para o dual, dando um valor igual a 75 para Y, que conclusão podemos tirar ?

Qualquer solução praticável, inclusive a ótima, para o primal será menor ou igual a 75 e qualquer solução praticável, inclusive a ótima, para o dual será maior ou igual a 32. A conclusão óbvia é que a solução ótima será aquela em que $Z = Y$.

Podemos então formular o enunciado do chamado Teorema Dual:

> **No evento em que tanto o modelo dual quanto o primal possuam soluções praticáveis, temos que: $Z^* = Y^*$, ou seja, o valor ótimo dos 2 modelos é o mesmo.**

Um corolário deste teorema é que se um dos modelos tem solução ilimitada, então o outro modelo não tem solução praticável pois caso tivesse, seria uma contradição ao exposto anteriormente.

Logo podemos enunciar o corolário como:

> **Se um dos modelos tem solução ótima ilimitada (Z^* ou $Y^* = \pm\infty$), então o outro modelo não tem solução praticável.**

3.4.3 Relação entre o Primal e o Dual

Como vimos anteriormente, dado um modelo de P.Linear pode-se, através de regras conhecidas, construir o outro modelo. A tabela abaixo dá as relações existentes entre os 2 modelos:

Modelo Primal	Modelo Dual
(MAX) com todas as restrições $\leq$ ou $=$	(MIN) com todas as restrições $\geq$ ou $=$
(MIN) com todas as restrições $\geq$ ou $=$	(MAX) com todas as restrições $\leq$ ou $=$
restrição	variável
variável	restrição
Coeficientes da função objetivo	Constantes do lado direito
Constantes do lado direito	Coeficientes da função objetivo
j-ésima coluna de coeficientes	j-ésima linha de coeficientes
j-ésima linha de coeficientes	j-ésima coluna de coeficientes
j-ésima variável ≥ 0	j-ésima restrição $\geq$ (MIN) ou $\leq$ (MAX)
j-ésima variável irrestrita em sinal	j-ésima restrição com sinal de $=$
j-ésima restrição com sinal $\geq$ ou $\leq$	j-ésima variável ≥ 0
j-ésima restrição com sinal de $=$	j-ésima variável irrestrita em sinal

Exemplo: Construir o Dual do modelo a seguir:

(MIN) $Z = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4$

s.a

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10$$
$$x_3 + 2x_4 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 - x_4 \leq 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$x_4 \Rightarrow$ Irrestrita em sinal

Antes de se aplicar a tabela devemos colocar o modelo primal dentro das regras que permitem o uso da tabela.

Assim, como o primal é um modelo de minimização, devemos fazer com que todas as restrições sejam do tipo $\geq$ ou $=$.

É necessário então que todas as restrições do tipo $\leq$ sejam multiplicadas (ambos os lados) por -1, invertendo seu sinal.

Devemos lembrar também que à cada restrição do primal teremos uma variável correspondente no Dual.

Transformando o Primal temos:

$$
\begin{array}{rl}
(\text{MIN})\ Z = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 & \\
\text{s.a} & \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 & \Rightarrow y_1 \\
-x_3 - 2x_4 \geq -10 & \Rightarrow y_2 \\
x_1 - x_2 + x_4 \geq -5 & \Rightarrow y_3 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 5 & \Rightarrow y_4 \\
-2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 \geq -20 & \Rightarrow y_5 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \\
x_4 \Rightarrow \text{Irrestrita em sinal} &
\end{array}
$$

Podemos agora aplicar a tabela e construir o modelo Dual:

$$
\begin{array}{rl}
(\text{MAX})\ Y = 10y_1 - 10y_2 - 5y_3 + 5y_4 - 20y_5 & \\
\text{s.a} & \\
2y_1 + y_3 + 2y_4 - 2y_5 \leq 3 & \Rightarrow x_1 \\
y_1 - y_3 + 3y_4 - 3y_5 \leq -4 & \Rightarrow x_2 \\
2y_1 - y_2 + y_4 - y_5 \leq 1 & \Rightarrow x_3 \\
y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = -2 & \Rightarrow x_4 \\
y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 & \\
y_1 \Rightarrow \text{Irrestrita em sinal} &
\end{array}
$$

3.5 Valor ótimo das variáveis do Modelo Dual

Assumindo que o primal foi resolvido por maximização temos:
a) $Y^* = Z^*$ (teorema dual)
b) O valor ótimo da variável y_j^* é igual ao coeficiente da variável de folga da j-ésima restrição na equação (0) do sistema ótimo primal.
Propriedade Adicional
O coeficiente da variável x_j na equação (0) do sistema ótimo primal é igual a diferença entre os lados esquerdo e direito da j-ésima restrição dual associada.

Vamos voltar ao modelo que vimos no início da Análise de Sensibilidade:

$$
\begin{array}{rl}
(\text{MAX})\ Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 & (\text{Lucro total}) \\
\text{s.a} & \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 100 & (\text{matéria prima – kilos}) \\
6x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 360 & (\text{espaço – } m^2) \\
8x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 400 & (\text{mão de obra – HH}) \\
x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

O modelo dual fica como:

$$
\begin{aligned}
&(\text{MIN})\ Y = 100y_1 + 360y_2 + 400y_3\\
&\text{s.a}\\
&y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 4\\
&2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 5\\
&2y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 3\\
&y_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Da solução (F), ótima, podemos tirar os valores ótimos do Dual:
$Y^* = Z^* = 280$
$y_1^* =$ coeficiente de F_1 em $(0)_F = 1$
$y_2^* =$ coeficiente de F_2 em $(0)_F = \dfrac{1}{2}$
$y_3^* =$ coeficiente de F_3 em $(0)_F = 0$
Vamos usar estes resultados para verificar a propriedade adicional enunciada anteriormente.
O coeficiente de x_1 na equação $(0)_F$ é 0. Se a propriedade é válida, a diferença entre os lados esquerdo e direito da 1ª restrição do modelo dual tem que ser igual a 0.
Restrição Dual $\Rightarrow y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 4$
Lado Esquerdo $\Rightarrow y_1 + 6y_2 + 8y_3$
Lado Direito $\Rightarrow 4$
Pela propriedade: $L_{esq} - L_{dir} = 0$
Temos, usando os valores ótimos dos $y_{i's}$:
$L_{esq} = 1 + 6 \times \dfrac{1}{2} + 8 \times 0 = 4$
$L_{esq} - L_{dir} = 4 - 4 = 0$
<u>Exercício:</u> Verificar a propriedade para os coeficientes de x_2 e x_3.

3.6 Significado econômico dos valores ótimos das variáveis do Modelo Dual

Vamos, mais uma vez, voltar ao nosso exemplo:

$$
\begin{aligned}
&(\text{MAX})\ Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 && \text{(Lucro total)}\\
&\text{s.a}\\
&x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 100 && \text{(matéria prima – kilos)}\\
&6x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 360 && \text{(espaço – } m^2\text{)}\\
&8x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 400 && \text{(mão de obra – HH)}\\
&x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

$Z^* = 280 \qquad x_1^* = 20 \qquad x_2^* = 40 \qquad x_3^* = 0$

Modelo Dual:

$$
\begin{aligned}
&(\text{MIN})\ Y = 100y_1 + 360y_2 + 400y_3\\
&\text{s.a}\\
&y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 4\\
&2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 5\\
&2y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 3\\
&y_i \geq 0
\end{aligned}
$$

$Y^* = 280 \qquad y_1^* = 1 \qquad y_2^* = \dfrac{1}{2} \qquad y_3^* = 0$

Devemos recordar que a equação de Y representa:

$Y^* = Z^* = \sum_{i=1}^{3} y_i^* \times$ constantes do lado direito $= \sum_{i=1}^{3} y_i^* \times$ disponibilidade de insumos

ou seja é o somatório do produto dos insumos (matéria prima, área para estocagem e mão de obra) pelo valor das variáveis do modelo dual.

No ótimo temos então:

$Y^* = 100y_1^* + 360y_2^* + 400y_3^* = 280$

Vamos supor que está sendo oferecida 1 unidade adicional de matéria prima (1 Kilo). Devo ou não adquirí-la ?

Em vez de 100 kilos passaríamos a ter 101 kilos, ou seja, na equação de Y^* teríamos:

$Y^* = 101y_1^* + 360y_2^* + 400y_3^*$

Como y_1^* é igual a 1 o lucro, em tese, aumentaria de \$1 o que poderia justificar a compra de mais 1 kilo de matéria prima.

Mas se o custo de compra deste kilo adicional fosse, por exemplo, de \$3. Estaríamos na verdade tendo prejuízo (de \$2) ao invés de aumentar o lucro.

Logo a resposta a pergunta é **sim**, desde que o preço de compra deste kilo adicional seja menor que 1.

Qual então o significado do valor ótimo de uma variável do modelo dual ? É o limite que devo pagar por uma unidade adicional do recurso associado à variável.

Obs: Por terem este significado, os valores ótimos das variáveis do modelo dual são chamadas de **valores implícitos** (shadow prices, em inglês).

O valor implícito de aquisição de 1 m^2 de área para estocagem é \$0,50; que é o valor ótimo de y_2 (variável dual associada à restrição do espaço para estocagem, ou seja na 2ª restrição).
Já o valor implícito para a mão de obra (homens-hora) é zero (valor ótimo de y_3). Este valor bate com a análise que já tínhamos feito anteriormente pois como existe folga nesta restrição, ou seja, não estamos utilizando toda a mão de obra disponível, não teremos nenhum ganho em adquirir mais mão de obra, mesmo sem custo, pois iria apenas sobrar mais.

3.7 Análise de Sensibilidade usando o Modelo Dual

Do que vimos anteriormente, a análise dos coeficientes da função objetivo, para variáveis não básicas na solução ótima, pode ser feita, até de forma mais simples, utilizando-se o dual.
Para exemplificar e comparar com o que já fizemos, vamos responder a seguinte pergunta: Qual o intervalo para o coeficiente de x_3 na função objetivo que mantém a solução (F) como a solução ótima ?
O coeficiente de x_3 é 3. Vamos supor que seja $3 + \Delta$.
Anteriormente analisamos e concluímos que Δ deveria ser ≤ 1. Vamos analisar usando o dual:
A mudança no coeficiente de x_3 implica que, no dual, a 3ª restrição fique como:
$2y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 3 + \Delta$
Substituindo pelos valores ótimos do dual temos:
$2 \times 1 + 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times 0 \geq 3 + \Delta$
$\Delta \leq 1$
Se $\Delta > 1$, a 3ª restrição do dual é violada, ou seja, deixa de ser praticável. Como uma solução antes de ser ótima tem que ser praticável, o ótimo dual deixa de ser ótimo e conseqüentemente o ótimo primal também deixa de ser ótimo pois, como vimos, as 2 soluções ótimas são iguais.
O uso do modelo dual permite que outras análises sejam realizadas e é o que veremos a seguir.

3.7.1 Inclusão de uma nova variável

Vamos supor que no nosso exemplo seja adicionada uma nova variável (x_n) cujos coeficientes são 3 na 1ª restrição, 6 na 2ª e 4 na 3ª restrição. O lucro unitário deste novo produto é de 8, ou seja, o coeficiente de x_n na função objetivo. A solução (F) continuaria sendo a ótima ?
O modelo passaria a ser :

$$(\text{MAX})\ Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_n$$

$$\text{s.a}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_n \leq 100$$
$$6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 6x_n \leq 360$$
$$8x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_n \leq 400$$
$$x_i \geq 0$$

No modelo dual teríamos uma nova restrição:
$3y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 8$
A solução (F) continuará ótima se a nova restrição dual continuar praticável.
Substituindo pelos valores ótimos do modelo dual temos:
$3 \times 1 + 6 \times \dfrac{1}{2} + 4 \times 0 \geq 8$
$6 \geq 8$ (não verdadeiro)
Como a restrição dual é violada, o ótimo dual deixa de ser ótimo pois deixa de ser praticável. Como conseqüência o ótimo primal (F) também deixa de ser ótimo.
Como encontrar a nova solução ótima ? Podemos continuar o simplex a partir da solução (F), ou seja, sem precisar recomeçar do início (Todos os programas pacotes de computador, profissionais, permitem isto).
Para isto é necessário calcular os coeficientes de x_n nas equações da solução (F).
Inicialmente temos que calcular o coeficiente de x_n na equação $(0)_F$. Ele será igual a diferença entre os lados esquerdo e direito da restrição dual associada, ou seja usando-se os antigos valores ótimos do dual:
$L_{esq} = 3y_1 + 6y_2 + 4y_3 = 3 \times 1 + 6 \times \dfrac{1}{2} + 4 \times 0 = 6$
$L_{dir} = 8$
Coeficiente de x_n em $(0)_F = L_{esq} - L_{dir} = 6 - 8 = -2$
Para encontrar os coeficientes de x_n nas restrições do sistema (F) vamos usar um artifício, baseado nas propriedades dos sistemas de equações lineares, que é construir uma função que resolvida, dê os coeficientes de x_n tanto no sistema inicial como em qualquer outro. Observando que os coeficientes das variáveis de folga formam uma matriz identidade no sistema inicial, podemos escrever:
Coef. de x_n na restrição $j = 3\times$ coef. de F_1 na rest. $j + 6\times$ coef. de F_2 na rest. $j + 4\times$ coef. de F_3 na rest. j
Vamos verificar se a função funciona no sistema (I):
Coef. de x_n em $(1)_I = 3 \times 1 + 6 \times 0 + 4 \times 0 = 3$
Coef. de x_n em $(2)_I = 3 \times 0 + 6 \times 1 + 4 \times 0 = 6$
Coef. de x_n em $(3)_I = 3 \times 0 + 6 \times 0 + 4 \times 1 = 4$

Para achar os coeficientes de x_n no sistema (F) basta aplicar a mesma função:

Coef. de x_n em $(1)_F = 3 \times 1 + 6 \times -\frac{1}{6} + 4 \times 0 = 2$

Coef. de x_n em $(2)_F = 3 \times -1 + 6 \times \frac{1}{3} + 4 \times 0 = -1$

Coef. de x_n em $(3)_F = 3 \times 4 + 6 \times -2 + 4 \times 1 = 4$

Podemos então escrever o novo sistema (F):

$$\textbf{(F)} \begin{cases} (0) \quad Z + x_3 + F_1 + \frac{1}{2}F_2 - 2x_n = 280 \\ (1) \quad x_2 + \frac{4}{3}x_3 + F_1 - \frac{1}{6}F_2 + 2x_n = 40 \\ (2) \quad x_1 - \frac{2}{3}x_3 - F_1 + \frac{1}{3}F_2 - x_n = 20 \\ (3) \quad 4x_3 + 4F_1 - 2F_2 + F_3 + 4x_n = 80 \end{cases}$$

$$\textbf{VB} \begin{Bmatrix} x_2 = 40 \\ x_1 = 20 \\ F_3 = 80 \end{Bmatrix} \quad \textbf{VNB} \begin{Bmatrix} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_n = 0 \end{Bmatrix}$$

$Z = 280$

<u>Exercício:</u> Prosseguir com o simplex e achar a nova solução ótima.

Resp: $Z^* = 320 \quad x_1^* = 40 \quad x_n^* = 20$

3.8 Análise de Sensibilidade dos coeficientes das restrições

3.8.1 De variável não básica na solução ótima

Vamos supor que o coeficiente da variável x_3 na 1ª restrição seja $2 + \Delta$ em vez de 2.

Para que valores de Δ a solução (F) continua sendo a ótima?

No dual, a 3ª restrição passa a ser: $(2 + \Delta)y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 3$

A solução (F) continuará sendo a ótima se a restrição dual continuar praticável.

Substituindo pelos valores ótimos, temos:

$(2 + \Delta) \times 1 + 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times 0 \geq 3$

$\Delta \geq -1$

Logo se $\Delta < -1$, ou seja se o coeficiente de x_3 na 1ª restrição for menor que 1, a restrição dual é violada. Logo a solução dual deixa de ser ótima pois deixa de ser praticável. Pelo teorema dual o ótimo primal também deixa de ser ótimo.

3.8.2 De variável básica na solução ótima

Para se analisar as conseqüências de uma alteração em um dos coeficientes de uma das restrições do modelo, de uma variável básica na solução ótima, é necessário muito trabalho com razoável complexidade. Assim é preferível executar o simplex novamente e verificar as conseqüências da alteração proposta.

3.9 Exercícios

A) Seja o seguinte modelo de P.Linear:

$$(\text{MAX})\ Z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

$$\text{s.a.}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leq 100 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Aplicando-se o Simplex, temos as seguintes soluções básicas onde (I) é a solução inicial e (F) é a solução final (ótima):

$$\textbf{(I)} \begin{cases} (0) & Z - 4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 = 0 \\ (1) & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + F_1 = 15 \\ (2) & 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + F_2 = 120 \\ (3) & 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + F_3 = 100 \end{cases}$$

$$\textbf{VB} \begin{Bmatrix} F_1 = 15 \\ F_2 = 120 \\ F_3 = 100 \end{Bmatrix} \quad \textbf{VNB} \begin{Bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

$$Z = 0$$

Variável entrante: x_4 Variável Sainte: F_3

$$\textbf{(1)} \begin{cases} (0) & Z - \frac{9}{5}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{11}{15}F_3 = \frac{220}{3} \\ (1) & \frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + F_1 - \frac{1}{15}F_3 = \frac{25}{3} \\ (2) & \frac{33}{5}x_1 + \frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + F_2 - \frac{2}{15}F_3 = \frac{320}{3} \\ (3) & \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + x_4 + \frac{1}{15}F_3 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

$$\textbf{VB} \begin{Bmatrix} F_1 = \frac{25}{3} \\ F_2 = \frac{320}{3} \\ x_4 = \frac{20}{3} \end{Bmatrix} \quad \textbf{VNB} \begin{Bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ F_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

$$Z = \frac{220}{3}$$

Variável entrante: x_1 Variável Sainte: F_1

$$\textbf{(2)}\begin{cases}(0) & Z+\frac{1}{6}x_2-\frac{11}{12}x_3+\frac{9}{4}F_1+\frac{7}{12}F_3=\frac{1105}{12}\\ (1) & x_1+\frac{5}{6}x_2+\frac{5}{12}x_3+\frac{5}{4}F_1-\frac{1}{12}F_3=\frac{125}{12}\\ (2) & -\frac{7}{6}x_2-\frac{13}{12}x_3-\frac{33}{4}F_1+F_2+\frac{5}{12}F_3=\frac{455}{12}\\ (3) & \frac{1}{6}x_2+\frac{7}{12}x_3+x_4-\frac{1}{4}F_1+\frac{1}{12}F_3=\frac{55}{12}\end{cases}$$

$$\textbf{VB}\begin{Bmatrix} x_1=\frac{125}{12}\\ F_2=\frac{455}{12}\\ x_4=\frac{55}{12}\end{Bmatrix}\quad \textbf{VNB}\begin{Bmatrix} x_2=0\\ x_3=0\\ F_1=0\\ F_3=0\end{Bmatrix}$$

$$Z=\frac{1105}{12}$$

Variável entrante: x_3 Variável Sainte: x_4

$$\textbf{(F)}\begin{cases}(0) & Z+\frac{3}{7}x_2+\frac{11}{7}x_4+\frac{13}{7}F_1+\frac{5}{7}F_3=\frac{695}{7}\\ (1) & x_1+\frac{5}{7}x_3-\frac{5}{7}x_4+\frac{10}{7}F_1-\frac{1}{7}F_3=\frac{50}{7}\\ (2) & -\frac{7}{6}x_2+\frac{13}{7}x_4-\frac{61}{7}F_1+F_2+\frac{4}{7}F_3=\frac{325}{7}\\ (3) & \frac{2}{7}x_2+x_3+\frac{12}{7}x_4-\frac{3}{7}F_1+\frac{1}{7}F_3=\frac{55}{7}\end{cases}$$

$$\textbf{VB}\begin{Bmatrix} x_1^*=\frac{50}{7}\\ F_2^*=\frac{325}{7}\\ x_3^*=\frac{55}{7}\end{Bmatrix}\quad \textbf{VNB}\begin{Bmatrix} x_2^*=0\\ x_4^*=0\\ F_1^*=0\\ F_3^*=0\end{Bmatrix}$$

$$Z^*=\frac{695}{7}$$

Responda as seguintes perguntas relativas ao modelo acima:

1. Considere que o coeficiente original de x_2 na função objetivo é 34/7 em vez de 5. Calcule os coeficientes de x_2 na equação (0) em cada uma das iterações do Simplex.
2. Responda ao exercício anterior para um coeficiente de 37/7 em vez de 5.

3. Considere que o coeficiente de x_4 na função objetivo original é 10, em vez de 11. Qual o coeficiente de x_4 na equação (0) do sistema (F) ?
4. Responda ao exercício anterior para um coeficiente igual a 12 em vez de 11.
5. Considere que a **constante do lado direito (CLD)** na eq. (2) de (I) é 100 em vez de 120. Calcule a CLD em todas as equações em cada iteração do Simplex.
6. Considere que a CLD na eq.(1) de (I) é 11 em vez de 15. Calcule as CLD em todas as equações da solução (F). Ela continua ótima ?
7. Em cada um dos itens abaixo, modifique o modelo como indicado, e escreva o modelo dual:
   a) A função objetivo é (MAX) $Z = 7x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 13x_4$
   b) AS CLD nas eq. (1), (2) e (3) são 30, 80 e 115 respectivamente.
   c) Os coeficientes de x_3 nas eq. (1), (2) e (3) são 1, 4 e 9 respectivamente.
   d) Os coeficientes de x_2 nas eq. (0), (1), (2) e (3) são –3, 1, 6 e –9 respectivamente.
   e) Há uma variável adicional, x_5, tendo coeficientes iguais a 13, 1, 1 e 18 nas eq. (0), (1), (2) e (3) respectivamente.
8. Ache o valor ótimo da função objetivo se as CLD nas eq. (1), (2) e (3) são respectivamente:
   a) 16,120 e 100
   b) 15,120 e 101
9. Suponha que o coeficiente de x_2 na eq.(3) é $(5 + \Delta)$. Qual o menor valor que Δ pode assumir de modo que a solução (F) permaneça ótima ?
10. Suponha que o coeficiente de x_2 na eq.(1) é $(1 + \Delta)$. Qual o menor valor que Δ pode assumir de modo que a solução (F) permaneça ótima ?
11. Suponha que adicionamos a variável x_5 tendo coeficientes 1, 2 e 3 nas equações (1), (2) e (3) respectivamente. Qual o maior valor possível para o coeficiente de x_5 na função objetivo de maneira que a solução (F) permaneça ótima ?
12. Responda ao exercício anterior considerando que o coeficiente da variável x_5 na eq.(3) é 16 em vez de 3.

B) Considere o seguinte modelo:

(0) (MAX) $Z = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4$

s.a

(1) $x_1 + 3x_2 - x3 + 2x_4 \leq 7$

(2) $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 12$

(3) $-x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 10$

$x_i \geq 0$

Se acrescentarmos F_1, F_2 e F_3 como variáveis de folga obtemos, após aplicar o Simplex, o seguinte sistema (F) final:

$$
\begin{array}{ll}
(0) & Z + \frac{7}{5}x_1 + \frac{12}{5}x_4 + \frac{1}{5}F_1 + \frac{4}{5}F_2 = 11 \\
(1) & \frac{3}{10}x_1 + x_2 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{2}{5}F_1 + \frac{1}{10}F_2 = 4 \\
(2) & -\frac{1}{10}x_1 + x_3 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}F_1 + \frac{3}{10}F_2 = 5 \\
(3) & \frac{1}{2}x_1 + 10x_4 + F_1 - \frac{1}{2}F_2 + F_3 = 11
\end{array}
$$

1. Qual a solução ótima ? é única ?
2. Qual o Lower e o Upper Limit para o coeficiente de x_1 na função objetivo ?
3. Idem para x_4.
4. Idem para cada CLD.
5. Escreva o modelo DUAL.
6. Qual a solução ótima dual ? Responda os ítens 2 e 3 usando o modelo dual.
7. Suponha que novas variáveis, x_5 e x_6 são adicionadas ao modelo. Os coeficientes de x_5 são –2, 5, –3 e 1 nas eq. (0), (1), (2) e (3) respectivamente, e os de x_6 são –4, –2, 10 e 12. A solução (F) continua ótima?
8. Suponha que o coeficiente de x_1 na eq. (1) é $(1 + \Delta)$. Qual o menor valor para Δ que mantém a solução (F) ótima ? Qual o maior ?
9. Suponha que o coeficiente de x_1 na eq. (2) é $(-1 + \Delta)$. Qual o menor valor para Δ que mantém a solução (F) ótima ? Qual o maior ?

C) Considere o seguinte modelo:

$$
\begin{array}{c}
\text{(MIN) } Z = \sum_{t=1}^{T} Y_i \\
\text{s.a} \\
Y_1 + Y_T \geq R_1 \\
Y_{t-1} + Y_t \geq R_t \quad t = 2, \ldots, T \\
Y_t \geq 0
\end{array}
$$

1. Monte o modelo para $T = 5$, onde $R_1 = 8$, $R_2 = 7$, $R_3 = 10$, $R_4 = 10$ e $R_5 = 2$
2. Chamando o modelo acima de dual, monte o primal
3. Resolva o primal pelo Simplex e dê a solução ótima dual
4. Ache os valores ótimos primal e dual quando $R_1 = 9$ em vez de 8

D) A Companhia Móveis Finos S/A fabrica vários tipos de móveis, inclusive móveis rústicos para casas de campo. Atualmente eles fabricam 3 produtos na linha de produção de móveis rústicos: uma cadeira de balanço, um banco de jardim e uma mesa de jantar.
Estes produtos são fabricados em 2 etapas envolvendo a seção de corte de madeira e a seção de montagem dos móveis.
O tempo, em horas, necessário para cada item em cada seção é mostrado abaixo:

	Produto			
	Cadeira	Banco	Mesa	Capacidade (horas)
Seção de Corte	1,2	1,7	1,2	1.000
Seção de Montagem	0,8	0	2,3	1.200

O lucro que a Móveis Finos S/A recebe pela fabricação e venda de cada unidade é \$3 para a cadeira, \$3 para o banco e \$5 para a mesa.
A Companhia está tentando planejar a sua produção para o próximo mês. Como a procura é muito grande por este tipo de móveis, qualquer quantidade que venha a ser produzida será vendida.
A produção está limitada, no entanto, pelas horas disponíveis nas seções de corte e montagem, além da quantidade de madeira disponível para este tipo de móveis.
No próximo mês a Companhia disporá de somente 2.000 m^3 de madeira para fazer os móveis da linha rústica, sendo que cada cadeira gasta 2 m^3, cada banco 3 m^3 e cada mesa 4,5 m^3.
De maneira a determinar a produção ótima do próximo mês foi formulado o seguinte modelo de P.linear:

$$\text{(MAX)} \quad Z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

s.a

$$1,2x_1 + 1,7x_2 + 1,2x_3 \leq 1000$$
$$0,8x_1 + 2,3x_3 \leq 1200$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4,5x_3 \leq 2000$$
$$x_i \geq 0$$

onde:
$x_1 \Rightarrow$ Nº de cadeiras a serem fabricadas no próximo mês
$x_2 \Rightarrow$ Idem, bancos
$x_3 \Rightarrow$ Idem, mesas
O modelo foi submetido ao Simplex, obtendo-se o seguinte sistema final:

$$(0) \qquad Z + \frac{83}{60}x_2 + \frac{7}{6}F_1 + \frac{4}{5}F_3 = \frac{8300}{3}$$
$$(1) \qquad x_1 + \frac{27}{20}x_2 + \frac{3}{2}F_1 - \frac{2}{5}F_3 = 700$$
$$(2) \qquad -\frac{37}{30}x_2 + \frac{1}{3}F_1 + F2 - \frac{3}{5}F_3 = \frac{1000}{3}$$
$$(3) \qquad \frac{1}{15}x_2 + x_3 - \frac{2}{3}F_1 + \frac{2}{5}F_3 = \frac{400}{3}$$

Responda as seguintes questões:

1. Qual a produção ótima para o próximo mês ?
2. Um distribuidor local está oferecendo a Móveis Finos S/A, madeira adicional a 0,60 o m^3. Deve a Companhia comprar ? (justifique)
3. O Departamento de Vendas sugeriu que um novo modelo de banco fosse produzido. Cada unidade deste novo modelo de banco necessita de 1,8 horas da seção de corte e 0,5 horas na seção de montagem, além de consumir 1,3 m^3. Que lucro deveria ter este novo produto para que seja atrativo produzí-lo ?
4. Se o lucro da cadeira diminuísse para $2,50 qual deveria ser o plano de produção e o lucro para o próximo mês ?

E) Uma fábrica de aparelhos de TV produz 4 modelos: Um modelo preto e branco, portátil, chamado “Sport”; um modelo preto e branco, não portátil, chamado “Standard”; um modelo a cores, portátil, chamado “Viajante” e um modelo a cores, não portátil, chamado “Super”.
Cada modelo consome tempo para a sua montagem e testes. As necessidades de tempo para montagens e testes, assim como o tempo disponível são mostrados abaixo:

	Modelo Sport	Modelo Standard	Modelo Viajante	Modelo Super	Total–hrs Disponível
Tempo de Montagem (hr)	6	10	12	15	2.000
Tempo de Testes (hr)	2	2	4	5	500
Lucro unitário ($)	40	60	80	100	

Devido a uma greve há falta de tubos de imagem. O fornecedor de tubos de imagem disse que sua produção está desorganizada e que não poderá fornecer mais do que 180 tubos de imagem no próximo mês, sendo que destes 180, no mínimo 100 terão que ser a cores. Fazendo:
$x_1 \Rightarrow$ Nº de televisores modelo “Sport” a serem fabricados no próximo mês
$x_2 \Rightarrow$ Idem, para modelos “Standard”
$x_3 \Rightarrow$ Idem, para modelos “Viajante“”
$x_4 \Rightarrow$ Idem,para modelos “Super”
Podemos construir um modelo de P.Linear para resolver o problema:

$$\text{(MAX)}\quad Z = 40x_1 + 60x_2 + 80x_3 + 100x_4$$
$$\text{s.a}$$
$$6x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 15x_4 \leq 2000$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 500$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 180$$
$$x_3 + x_4 \geq 100$$
$$x_i \geq 0$$

Introduzindo as variáveis de folga e aplicando o Simplex de 2 fases chegamos ao seguinte sistema:

$$(0)\quad Z + 20x_1 + 10x_4 + 30F_2 + 40F_4 = 11000$$

$$(1)\quad -4x_1 - 2x_4 + F_1 - 5F_2 - 8F_4 = 300$$

$$(2)\quad x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}F_2 + 2F_4 = 50$$

$$(3)\quad -\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}F_2 + F_3 - F_4 = 30$$

$$(4)\quad x_3 + x_4 - F_4 = 100$$

1. Que modelos de televisores devem ser fabricados no próximo mês ? Em que quantidade ?
2. Se por qualquer problema só for possível ter 1.800 horas para montagem, a resposta do item **1** continua válida ?
3. Suponha que 80 horas adicionais de teste possam ser obtidas externamente por $4/hora. Isto deve ser feito ? Porque ?
4. Suponha que o lucro do modelo "Sport" seja alterado de $40 para $45. Qual deveria ser o novo esquema de produção ?
5. A gerência está considerando a introdução de um novo modelo colorido chamado "Matador". Cada unidade deste novo modelo necessita de 10 horas de montagem e 3 horas de teste. O lucro unitário deste novo modelo será de $70. Deve-se ou não produzir o novo modelo ? Porque ?

Obs: Como a procura é muito grande, qualquer modelo produzido, preto e branco ou colorido, será vendido.

F) Uma marcenaria produz 4 modelos de armários embutidos. Para fazer cada armário, 3 operações básicas são realizadas: Corte da Madeira, Montagem do Armário e Acabamento.
A capacidade de produção da marcenaria está limitada em 900 horas para corte, 800 horas para montagem e 480 horas para acabamento.
O objetivo da firma é maximizar seu lucro. Fazendo-se x_i ser o número de armários a serem produzidos do modelo i, temos:

$$(\text{MAX}) \quad Z = 90x_1 + 160x_2 + 40x_3 + 100x_4$$

$$\text{s.a}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 480 \quad \text{(acabamento)} \\ 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 &\leq 800 \quad \text{(montagem)} \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\leq 900 \quad \text{(corte)} \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Usando o Simplex chegamos ao seguinte sistema ótimo:

$$(0) \quad Z + 10x_1 + 130x_3 + \frac{25}{2}F_1 + 15F_2 = 18000$$

$$(1) \quad x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{32}F_1 - \frac{1}{16}F_2 = 25$$

$$(2) \quad x_1 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 - \frac{1}{8}F_1 + \frac{1}{4}F_2 = 140$$

$$(3) \quad 2x_1 - \frac{11}{2}x_3 - \frac{5}{8}F_1 - \frac{3}{4}F_2 + F3 = 0$$

1. Qual o modelo dual e a solução ótima dual ?
2. Qual deveria ser o lucro de x_3 para que ele deixasse de ser igual a zero na solução ótima ?
3. Para que intervalo na capacidade da seção de montagem, a solução ótima permanece ótima ?
4. Deve ser fabricado ou não, um novo modelo de armário que necessita de 20 horas de corte, 3 horas de montagem e 2 horas de acabamento por cada unidade produzida, dando um lucro unitário de \$120 ? (justifique)

G) Formular o Dual para o modelo abaixo:

$$(\text{MIN}) \quad Z = 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 5x_4$$

$$\text{s.a}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_4 &\leq 11 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 &\geq 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 18 \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 &\leq 19 \\ x_1, x_2, x_4 &\geq 0 \\ x_3 &\Rightarrow \text{Irrestrita em sinal} \end{aligned}$$

H) Considere o seguinte modelo de P.Linear:

(MAX) $Z = 10x_1 + 15x_2 + 5x_3$

s.a

$$2x_1 + x_2 \leq 6000$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9000$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4000$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Submetido ao Simplex foi encontrada a seguinte solução final:

(0) $Z + \frac{20}{3}x_3 + \frac{5}{3}F_2 + 5F_3 = 35000$

(1) $x_3 + F_1 - F_2 + F_3 = 1000$

(2) $x_1 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}F_2 - F3 = 2000$

(3) $x_2 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}F_2 + F_3 = 1000$

1. Qual o Lower e o Upper Limit para os coeficientes de x_1, x_2 e x_3 na função objetivo ?
2. Idem para as CLD das 3 restrições.

I) Considere o seguinte modelo de P.Linear:

(MAX) $Z = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3$

s.a

$$3x_1 - 4x_2 - 6x_3 \leq 2$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 5$$
$$x_i \geq 0$$

Submetido ao Simplex foi encontrado o seguinte sistema final:

(0) $Z + 4x_1 + 6x_2 + 3F_2 = 33$

(1) $9x_1 - x_2 + F_1 + 3F_2 = 35$

(2) $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 + \frac{1}{2}F_2 = \frac{11}{2}$

(3) $3x_1 + 4x_2 + F_2 + F_3 = 16$

onde F_i é a variável de folga da restrição i.

Responda as perguntas abaixo:

1. Qual o valor mínimo para o coeficiente de x_1 na função objetivo que altera a solução ótima ?

2. Qual o intervalo de variação para a constante do lado direito da 3ª restrição que mantém a atual solução ótima como ótima ?
3. Suponha que uma nova variável x_4 seja adicionada ao modelo original com coeficientes 4, 2, –3 e 1 respectivamente na função objetivo e restrições. A solução ótima continua a mesma ? (justifique)
4. Como ficaria o sistema final acima se esta variável x_4 estivesse no modelo ?

3.10 Respostas dos exercícios da seção 3.9

Exercício A

1) –25/21; 13/42; 4/7
2) –34/21; –5/42; 1/7
3) 18/7
4) 4/7
5) Somente a CLD da equação (2) é alterada.
260/3; 215/12; 185/7
6) 643/7; 10/7; 569/7; 67/7; sim
7) O Dual do problema original é:

$$\text{(MIN)}\ \ Y = 15y_1 + 120y_2 + 100y_3$$

$$\text{s.a}$$

$$\begin{aligned} y_1 + 7y_2 + 3y_3 &\geq 4 \\ y_1 + 5y_2 + 5y_3 &\geq 5 \\ y_1 + 3y_2 + 10y_3 &\geq 9 \\ y_1 + 2y_2 + 15y_3 &\geq 11 \\ y_i &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Troque as CLD para 7,8,7 e 13.
(b) Troque a função objetivo para:
(MIN) $Y = 30y_1 + 80y_2 + 155y_3$
(c) Troque a equação (3) para:
$y_1 + 4y_2 + 9y_3 \geq 9$
(d) Troque a equação (2) para:
$y_1 + 6y_2 - 9y_3 \geq -3$
(e) Adicione:
$y_1 + y_2 + 18y_3 \geq 13$
8) (a) 708/7 (b) 100
9) $\Delta \geq -\frac{3}{5}$
10) $\Delta \geq -\frac{3}{13}$
11) 4
12) 93/7

Exercício B

1) $Z = 11 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 5 \quad F_3 = 11$ única.
2) $[-\infty, -\dfrac{3}{5}$
3) $[-\infty, \frac{2}{5}]$
4) (a) $[-3; \infty]$
(b) $[-\frac{14}{3}; 34]$
(c) $[-1; \infty]$

5)

$$
\begin{aligned}
(\text{MIN})\ Y &= 7y_1 + 12y_2 + 10y_3 \\
&\text{s.a} \\
y_1 - y_2 - y_3 &\geq -2 \\
3y_1 - 2y_2 - 4y_3 &\geq -1 \\
-y_1 + 4y_2 + 3y_3 &\geq 3 \\
2y_1 + 8y_3 &\geq -2 \\
y_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

6) $y_1 = \frac{1}{5} \quad y_2 = \frac{4}{5} \quad y_3 = 0 \quad Y = 11$

7) Sim

8) –7

9) –7/14;

Exercício C

1)

$$
\begin{aligned}
(\text{MIN})\ Y &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \\
&\text{s.a} \\
y_1 + y_5 &\geq 8 \\
y_1 + y_2 &\geq 7 \\
y_1 + y_3 &\geq 10 \\
y_3 + y_4 &\geq 10 \\
y_4 + y_5 &\geq 2 \\
y_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
(\text{MAX})\ Z &= 8x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 2x_5 \\
&\text{s.a} \\
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_2 + x_3 &\leq 1 \\
x_3 + x_4 &\leq 1 \\
x_4 + x_5 &\leq 1 \\
x_1 + x_5 &\leq 1
\end{aligned}
$$

3) $Z = 37/2 \quad x_2 = 1/2 \quad x_3 = 1/2 \quad x_1 = 1/2 \quad x_4 = 1/2 \quad x_5 = 1/2$

$Y = 37/2 \quad y_1 = 13/2 \quad y_2 = 1/2 \quad y_3 = 19/2 \quad y_4 = 1/2 \quad y_5 = 3/2$

4) $Y = 19 \quad y_1 = 7 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 10 \quad y_4 = 0 \quad y_5 = 2$

Exercício D

1)

$x_1 =$ cadeiras = 700

$x_2 =$ bancos = 0

$x_3 =$ mesas $= \dfrac{400}{3}$

$$Z = \frac{8300}{3}$$

2) Sim
3) Isto equivale a ter uma nova restrição no Dual:
$1,8y_1 + 0,5y_2 + 13y_3 \geq L$
$1,8 \times 1,166 + 0,5 \times 0 + 13 \times \frac{4}{5} \geq L$
$L > 3,14$
4) $[\frac{20}{9}; 5]$ Com 2,5 a solução ótima não se altera.
Logo a solução atual continua ótima e o lucro passa a ser: $Z = \frac{8300}{3} - (3 - 2.5) \times 700 = \frac{7250}{3}$

Exercício E

1)
$x_2 =$ Standard = 50
$x_3 =$ Viajante = 100
$Z = 11000$
2) $[1700; \infty]$, Sim
3) Sim, pois o valor implícito é \$30.
4) O mesmo pois a restrição dual não é violada.
5) Sim, pois a nova restrição dual é violada.

Exercício F

1)

$$(\text{MIN})\ Y = 480y_1 + 800y_2 + 900y_3$$

s.a

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 90$$
$$8y_1 + 4y_2 + 8y_3 \geq 160$$
$$4y_1 + 8y_2 + 3y_3 \geq 40$$
$$2y_1 + 5y_2 + 5y_3 \geq 100$$

$y_1 = 12,5 \quad y_2 = 15 \quad y_3 = 0$

2) $[40; 170]$ 170,01
3) $[240; 800]$
4) Sim, a restrição dual é violada.

Exercício G

$$(\text{MAX})\ Y = -11y_1 + 12y_2 + 18y_3 - 19y_4$$

s.a

$$y_1 + 3y_2 + y_3 - 4y_4 \leq 3$$
$$-y_1 + y_3 + 5y_4 \leq -5$$
$$-y_2 + y_3 + y_4 = 4$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \leq -5$$
$$y_1, y_2, y_4 \geq 0$$
$$y_3 \Rightarrow \text{Irrestrita em sinal}$$

Exercício H

1)

x_1 $[7,5;15]$

x_2 $[11;20]$

x_3 $[-\infty;11,667]$

2)

(a) $[5000;\infty]$

(b) $[6000;10000]$

(c) $[3000;6000]$

Exercício I

1) $[2;6]$ 6,01

2) $[-11;\infty]$

3)Não, a restrição dual é violada.

4)

$$(0)\ \ldots - 13x_4 = 33$$

$$(1)\ \ldots - 7x_4 = 35$$

$$(2)\ \ldots - \frac{3}{2}x_4 = 5,5$$

$$(3)\ \ldots - 2x4 = 16$$

Capítulo 4

Algorítimo dos Transportes

Veremos neste capítulo o chamado Algorítimo dos Transportes. Este algorítimo resolve, de maneira muito mais rápida, modelos de programação linear cuja formulação apresenta certas características que permitem o uso do algorítimo. Veremos também que o Algorítimo dos Transportes nada mais é do que uma forma diferente de se fazer o simplex.

4.1 Um exemplo

Uma empresa tem 3 fábricas que produzem um determinado produto. A capacidade de produção mensal das 3 fábricas é de 6, 1 e 10 unidades respectivamente. A empresa tem 4 armazéns de vendas que vendem mensalmente 7, 5, 3 e 2 unidades do produto respectivamente. O custo de transportar 1 unidade de cada fábrica para cada armazém está dado na tabela abaixo:

	Armazém			
Fábrica	**1**	**2**	**3**	**4**
1	2	3	11	7
2	1	0	6	1
3	5	8	15	9

O objetivo da Empresa é atender as necessidades dos armazéns com a produção das fábricas, com o menor custo total.

4.2 Formulação como um modelo clássico de P.Linear

Podemos construir o seguinte modelo para o exemplo:
$x_{ij} \Rightarrow$ unidades a serem transportadas da fábrica i para o armazém j.

$$\text{(MIN) } Z = 2x_{11} + 3x_{12} + 11x_{13} + 7x_{14} + x_{21} + 6x_{23} + x_{24} + 5x_{31} + \\ +8x_{32} + 15x_{33} + 9x_{34}$$

$$\text{s.a}$$

$$\begin{array}{ll} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 6 & \text{(fábrica 1)} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 & \text{(fábrica 2)} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10 & \text{(fábrica 3)} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7 & \text{(armazém 1)} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 5 & \text{(armazém 2)} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 3 & \text{(armazém 3)} \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 2 & \text{(armazém 4)} \\ x_{ij} \geq 0 & \end{array}$$

O sinal de igual das restrições deve-se ao fato de que o somatório da produção das fábricas é igual ao somatório das necessidades dos armazéns.
Para problemas com esta estrutura particular, qual seja, coeficientes das restrições iguais a 0 ou 1, é que podemos utilizar o chamado Algorítimo dos Transportes.
Ele tem este nome porque os exemplos são, como acima, normalmente de modelos de transporte mas na verdade, qualquer modelo de P.Linear que tenha este tipo de estrutura, pode ser resolvido pelo algorítimo.

4.3 Quadro (tableau) usado no algorítimo dos transportes

Fontes (Fábricas)	**Destinos (Armazéns)**				**Disp.**
	1	**2**	**3**	**4**	
1	2 x_{11}	3 x_{12}	11 x_{13}	7 x_{14}	**6**
2	1 x_{21}	0 x_{22}	6 x_{23}	1 x_{24}	**1**
3	5 x_{31}	8 x_{32}	15 x_{33}	9 x_{34}	**10**
Nec.	**7**	**5**	**3**	**2**	

Podemos observar que todo o modelo, ou seja a função objetivo e as restrições estão “escritas” no quadro.

4.4 Fonte ou destino artificial

O algorítimo dos transportes obriga que o somatório das disponibilidades seja igual ao somatório das necessidades, o que nem sempre ocorre na prática.
Para exemplificar, vamos supor que a capacidade de produção da fábrica 3 seja de 20 unidades, em vez de 10.

	1	**2**	**3**	**4**	**Disp.**
1	2	3	11	7	**6**
2	1	0	6	1	**1**
3	5	8	15	9	**20**
Nec.	**7**	**5**	**3**	**2**	

Será necessário criar então um destino ARTIFICIAL (destino 5), com custos de transporte **iguais a ZERO** (o destino não existe fisicamente):

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Disp.**
1	2	3	11	7	0	**6**
2	1	0	6	1	0	**1**
3	5	8	15	9	0	**20**
Nec.	**7**	**5**	**3**	**2**	**10**	

Se o somatório das necessidades for maior que o somatório das disponibilidades, temos que criar uma fonte artificial.

4.5 Impossibilidade de transporte

Vamos supor que no nosso exemplo exista uma impossibilidade de transporte entre a fábrica 2 e o armazém 4.
Se esta condição está presente no modelo, precisamos garantir que na solução final teremos $x^*_{24} = 0$, ou seja, que o valor ótimo de x_{24} seja igual a 0.
O objetivo do modelo de transportes é minimizar o custo total. Assim, se atribuirmos um custo unitário muito alto para a cela (2,4) estaremos criando uma penalidade ou multa para o valor de Z se a variável x_{24} for diferente de zero, lembrando que ela não pode ser negativa. Este fato fará com que, naturalmente, o valor de x_{24} seja levado para zero na solução ótima.

Em programação matemática, esta "multa" é chamada de "Big M" e é representada por um **M** maiscúlo. Quando resolvemos modelos a mão, podemos trabalhar com o próprio **M** mas nos computadores, o **M** é substituído por um número muito grande (100.000.000, por exemplo).

4.6 Etapas do algorítimo dos transportes

As etapas básicas do Algorítimo dos Transportes são:

1. Obter uma solução básica inicial.

2. Dada uma solução básica testar se ela é a ótima.

3. Se não for a ótima, obter a melhor sol. básica adjacente e voltar a etapa 2.

Como dissemos anteriormente, o Algorítimo dos Transportes nada mais é do que um simplex feito de uma maneira diferente. Logo, nada mais natural que os seus passos sejam exatamente os do Simplex.

4.7 Número de variáveis básicas nas soluções básicas

O número de variáveis básicas em uma solução básica é igual ao número de equações linearmente independentes.
Em nosso exemplo, a primeira vista, cada solução básica teria 7 variáveis básicas , ou seja, o número de equações (restrições) do problema.
Ocorre no entanto que, como o somatório das disponibilidades é igual ao somatório das necessidades, dadas 6 das equações, a sétima não é mais independente. Logo temos na verdade 6 equações independentes.
Genericamente se temos m fontes e n destinos, cada solução básica terá $(m+n-1)$ variáveis básicas e $(m \times n) - (m + n - 1)$ variáveis não básicas.

4.8 Métodos para achar a solução básica inicial

Existem vários métodos para se achar a solução básica inicial no método dos transportes. Usaremos o chamado **Método de Aproximação de Vogel** que é reconhecidamente o melhor deles, ou seja, aquele cuja solução básica inicial, geralmente, está mais próxima da solução ótima.

Etapas do Método

1. Calcule para cada linha e cada coluna a diferença entre os 2 menores custos. No caso dos 2 menores custos serem iguais a diferença é zero.

2. Identifique a linha ou coluna com a maior diferença. No caso de empate a escolha é arbitrária.

3. Coloque a maior quantidade possível na cela de menor custo da linha ou coluna identificada na etapa 2.

4. Elimine a linha ou coluna esgotada. No caso em que uma linha e uma coluna são esgotadas ao mesmo tempo, só podemos esgotar uma delas ficando a outra com zero, mas não esgotada.

5. Voltar a etapa 1.

Exemplo: Achar a solução básica inicial do nosso exemplo
Começamos achando a diferença entre os 2 menores custos de cada linha e de cada coluna, obtendo:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.	Diferenças
1	2	3	11	7	**6**	1
2	1	0	6	1	**1**	1
3	5	8	15	9	**10**	3
Nec.	**7**	**5**	**3**	**2**		
Diferenças	1	3	5	6		

Na 4ª coluna temos a maior diferença (6). Nesta coluna, escolhemos a cela com o menor custo. É a cela correspondente a x_{24} que tem custo igual a 1.
Agora temos que atribuir a maior quantidade possível para x_{24}, lembrando que a soma da linha 2 tem que dar 1 e a soma da coluna 4 tem que dar 2. Assim, o maior valor que pode ser atribuído a x_{24} é o MIN(1,2), ou seja 1.
Ao se atribuir 1 a x_{24}, a linha 2 fica esgotada, ou seja nada pode ser atribuído as outras variáveis da linha (serão variáveis não básicas = 0) pois a soma já deu 1. Por sua vez, na coluna 4, cuja soma tem que dar 2, fica faltando 1 pois $2 - 1 = 1$.
Temos que recalcular as diferenças entre os 2 menores custos de cada linha e coluna, sem considerar a linha 2 que está eliminada. Como a última eliminação foi de uma linha, a diferença nas linhas, obviamente, não se alteraram. Basta então calcular as diferenças das colunas, obtendo-se:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.	Diferenças
1	2	3	11	7	**6**	1
2				$\boxed{1}$	**1**	
3	5	8	15	9	**10**	3
Nec.	**7**	**5**	**3**	**1**		
Diferenças	3	5	4	2		

A maior diferença está agora na 2ª coluna (5). A cela de menor custo (=3) nesta coluna é a correspondente a variável x_{12}. Como a soma da linha tem que dar 6 e a soma da coluna tem que dar 5, a maior quantidade que pode ser atribuída a x_{12} é o MIN(5,6), ou seja 5.
Com 5 em x_{12}, a coluna fica esgotada e na linha ainda fica faltando 1 (6 — 5).
Temos quer voltar a calcular a diferença entre os 2 menores custos, sem considerar a coluna 2 que está eliminada. Como acabamos de eliminar uma coluna, as diferenças só podem ter se alterado nas linhas. Temos então:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.	Diferenças
1	2	$\boxed{5}$	11	7	**1**	5
2				$\boxed{1}$	**1**	
3	5		15	9	**10**	4
Nec.	**7**	**5**	**3**	**1**		
Diferenças	3		4	2		

A maior diferença está agora na 1ª linha (5). A cela de menor custo desta linha é a correspondente a x_{11} que tem custo igual a 2. O máximo que conseguimos atribuir a x_{11} é o MIN(1,7) ou seja 1. Ao fazer isto, a linha 1 fica esgotada e na coluna 1 ficam ainda faltando 6 (7 — 1). Eliminando-se a linha 1, temos a seguinte matriz:

Fábrica	**Armazém** 1	2	3	4	**Disp.**
1	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$			**6**
2				$\boxed{1}$	**1**
3	5		15	9	**10**
Nec.	**6**	**5**	**3**	**1**	

Neste ponto não é mais necessário seguir com o algorítimo pois como na coluna 1 só resta, com possibilidade de receber valor, a cela correspondente a variável x_{31} e restam 6 para serem atribuídos, fazemos $x_{31} = 6$.
Aplicando-se o mesmo raciocínio, temos $x_{33} = 3$ e $x_{34} = 1$.
Temos então a solução básica inicial:

Fábrica	**Armazém** 1	2	3	4	**Disp.**
1	2 $\boxed{1}$	3 $\boxed{5}$	11	7	**6**
2	1	0	6	1 $\boxed{1}$	**1**
3	5 $\boxed{6}$	8	15 $\boxed{3}$	9 $\boxed{1}$	**10**
Nec.	**7**	**5**	**3**	**2**	

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x_{11} = 1 \\ x_{12} = 5 \\ x_{24} = 1 \\ x_{31} = 6 \\ x_{33} = 3 \\ x_{34} = 1 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\begin{array}{l} x_{13} = 0 \\ x_{14} = 0 \\ x_{21} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{23} = 0 \\ x_{32} = 0 \end{array}\right\}$$

$Z = 1 \times 2 + 5 \times 3 + 1 \times 1 + 6 \times 5 + 3 \times 15 + 1 \times 9 = 102$

Exercício: Achar a solução básica inicial, pelo método de Vogel, para o modelo abaixo:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.
1	5	8	3	6	**30**
2	4	5	7	M	**50**
3	6	2	4	5	**40**
Nec.	**30**	**20**	**40**	**30**	

Calculando as diferenças entre os menores custos, temos:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.	Diferenças
1	5	8	3	6	**30**	2
2	4	5	7	M	**50**	1
3	6	2	4	5	**40**	2
Nec.	**30**	**20**	**40**	**30**		
Diferenças	1	3	1	1		

A maior diferença está na 2ª coluna. A cela de menor custo desta coluna é a correspondente a x_{32}. O máximo possível de atribuir a x_{32} é igual ao MIN(40,20), ou seja 20. Esgota-se a 2ª coluna e ficam faltando 20 $(= 40 - 20)$ na 3ª linha. Recalculando-se as diferenças (só das linhas) temos:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.	Diferenças
1	5		3	6	**30**	2
2	4		7	M	**50**	3
3	6	$\boxed{20}$	4	5	**20**	1
Nec.	**30**	**20**	**40**	**30**		
Diferenças	1		1	1		

A maior diferença está na 2ª linha. A cela de menor custo é a de x_{21}. O máximo possível de se colocar é o MIN(50,30), ou seja 30. Com isto esgota-se a 1ª coluna e ficam restando 20 na 2ª linha.
Recalculando-se as diferenças (só das linhas), temos:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.	Diferenças
1			3	6	**30**	3
2	$\boxed{30}$		7	M	**20**	M − 7
3		$\boxed{20}$	4	5	**20**	1
Nec.	**30**	**20**	**40**	**30**		
Diferenças			1	1		

A maior diferença está na 2ª linha ($M - 7$). A cela de menor custo é a que corresponde a x_{23}. Pode-se colocar nela o MIN(20,40), ou seja 20. Esgota-se a 2ª linha e na 3ª coluna ainda restam 20.
Recalculando-se as diferenças (só das colunas), temos:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.	Diferenças
1			3	6	30	3
2	$\boxed{30}$		$\boxed{20}$		50	
3		$\boxed{20}$	4	5	20	1
Nec.	30	20	20	30		
Diferenças			1	1		

A maior diferença está na 1ª linha. A cela de menor custo corresponde a x_{13} e podemos colocar o MIN(30,20), ou seja 20. Esgota-se a 3ª coluna e na 1ª linha restam 10 (= 30 − 20).
Temos então:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.
1			$\boxed{20}$	6	10
2	$\boxed{30}$		$\boxed{20}$		50
3		$\boxed{20}$		5	20
Nec.	30	20	40	30	

Como na 4ª coluna só restam as celas (1,4) e (3,4) temos $x_{14} = 10$ e $x_{34} = 20$.
A solução básica inicial é:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.
1	5	8	3 $\boxed{20}$	6 $\boxed{10}$	30
2	4 $\boxed{30}$	5	7 $\boxed{20}$	M	50
3	6	2 $\boxed{20}$	4	5 $\boxed{20}$	40
Nec.	30	20	40	30	

$$\mathbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x_{13}=20\\ x_{14}=10\\ x_{21}=30\\ x_{23}=20\\ x_{32}=20\\ x_{34}=20 \end{array}\right\} \quad \mathbf{VNB}\left\{\text{ as demais } = 0\right\}$$

$$Z = 3\times 20 + 6\times 10 + 4\times 30 + 7\times 20 + 2\times 20 + 5\times 20 = 520$$

4.9 Esgotamento simultâneo de linha e coluna

Vamos supor que em determinado ponto do método de Vogel temos o seguinte:

Fábrica	Armazém 1	Armazém 2	Armazém 3	Armazém 4	Disp.	Diferenças
1	5	8	3	6	**30**	2
2	4	5	7	M	**50**	1
3	9	2	4	8	**30**	2
Nec.	**30**	**30**	**40**	**10**		
Diferenças	1	3	1	2		

A maior diferença está na 2ª coluna. A cela de menor custo é a que corresponde a x_{32}. O máximo que podemos atribuir a variável é igual ao MIN(30,30), ou seja 30. Tanto a linha como a coluna são esgotadas mas **só podemos esgotar uma delas. A escolha é arbritária.** Escolhendo-se a coluna para esgotar, na linha vai ficar faltando 0 $(= 30 - 30)$. Temos então, recalculando-se a diferença entre os menores custos:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.	Diferenças
1	5		3	6	**30**	2
2	4		7	M	**50**	3
3	9	$\boxed{30}$	4	8	**0**	4
Nec.	**30**	**30**	**40**	**10**		
Diferenças	1		1	2		

A maior diferença está agora na 3ª linha. A cela de menor custo é (3,3) e o maior valor que podemos atribuir a x_{33} é igual ao MIN(0,40), ou seja 0. Logo x_{33} vai ser uma variável básica degenerada na solução básica inicial. Recalculando-se a diferença entre os 2 menores custos temos:

Fábrica	Armazém 1	2	3	4	Disp.	Diferenças
1	5		3	6	**30**	2
2	4		7	M	**50**	3
3		$\boxed{30}$	$\boxed{0}$		**30**	
Nec.	**30**	**30**	**40**	**10**		
Diferenças	1		4	M – 6		

Pode-se prosseguir normalmente com o algorítimo.

4.10 Teste para saber se uma solução básica é ótima

Vamos voltar a formulação do nosso exemplo do início do capítulo:

$$(\text{MIN})\ Z = 2x_{11} + 3x_{12} + 11x_{13} + 7x_{14} + x_{21} + 6x_{23} + x_{24} + 5x_{31} + \\ + 8x_{32} + 15x_{33} + 9x_{34}$$

s.a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 6 \Rightarrow v_1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \Rightarrow v_2$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10 \Rightarrow v_3$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7 \Rightarrow w_1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 5 \Rightarrow w_2$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 3 \Rightarrow w_3$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 2 \Rightarrow w_4$$
$$x_{ij} \geq 0$$

Vamos construir o modelo Dual:

$$(\text{MAX})\ Y = 6v_1 + v_2 + 10v_3 + 7w_1 + 5w_2 + 3w_3 + 2w_4$$

s.a

$$v_1 + w_1 \leq 2 \Rightarrow x_{11}$$
$$v_1 + w_2 \leq 3 \Rightarrow x_{12}$$
$$v_1 + w_3 \leq 11 \Rightarrow x_{13}$$
$$\vdots$$
$$v_i + w_j \leq c_{ij} \Rightarrow x_{ij}$$
$$v_i, w_j \Rightarrow \text{ Irrestritas em sinal}$$

Vamos supor que temos a seguinte solução básica:

	1	2	3	4	Disp.
1	2 **6**	3	11	7	**6**
2	1	0 **1**	6	1	**1**
3	5 **1**	8 **4**	15 **3**	9 **2**	**10**
Nec.	**7**	**5**	**3**	**2**	

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x_{11}=6 \\ x_{22}=1 \\ x_{31}=1 \\ x_{32}=4 \\ x_{33}=3 \\ x_{34}=2 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\text{ as demais } =0\right\}$$

$$Z=112$$

Vamos escrever as restrições do modelo dual associadas às variáveis básicas:

$x_{11} \rightarrow v_1 + w_1 \leq 2$
$x_{22} \rightarrow v_2 + w_2 \leq 0$
$x_{31} \rightarrow v_3 + w_1 \leq 5$
$x_{32} \rightarrow v_3 + w_2 \leq 8$
$x_{33} \rightarrow v_3 + w_3 \leq 15$
$x_{34} \rightarrow v_3 + w_4 \leq 9$

Como o coeficiente de variável básica na equação (0) é igual a zero temos:
$v_i + w_j - c_{ij} = 0$
pois o $L_{esq} - L_{dir}$ da restrição dual associada é igual ao coeficiente da variável na eq.(0), ou seja igual a zero no caso de variáveis básicas.
Assim, por causa desta propriedade podemos escrever:

$v_1 + w_1 - 2 = 0$
$v_2 + w_2 - 0 = 0$
$v_3 + w_1 - 5 = 0$
$v_3 + w_2 - 8 = 0$
$v_3 + w_3 - 15 = 0$
$v_3 + w_4 - 9 = 0$

Como temos 6 equações e 7 incógnitas, escolhemos uma das variáveis (preferencialmente a que aparece mais) e atribuímos um valor qualquer (normalmente zero).
Assim fazendo $v_3 = 0$ temos como solução do sistema:
$w_4 = 9$, $w_3 = 15$, $w_2 = 8$, $w_1 = 5$, $v_2 = -8$, $v_1 = -3$
Para saber se uma solução básica é ótima temos que "olhar" a equação de Z (eq. 0), ou seja, os coeficientes das variáveis não básicas que são os que aparecem na equação (0).
Para obter estes coeficientes basta aplicar a propriedade que diz que o $L_{esq} - L_{dir}$ da restrição dual associada é igual ao coeficiente da variável na eq. (0).
Assim temos:

$x_{12} \rightarrow v_1 + w_2 - c_{12} = 2$
$x_{13} \rightarrow v_1 + w_3 - c_{13} = 1$
$x_{14} \rightarrow v_1 + w_4 - c_{14} = -1$
$x_{21} \rightarrow v_2 + w_1 - c_{21} = -4$
$x_{23} \rightarrow v_2 + w_3 - c_{23} = 1$
$x_{24} \rightarrow v_2 + w_4 - c_{24} = 0$

Logo a equação (0) é:
(0) $Z + 2x_{12} + x_{13} - x_{14} - 4x_{21} + x_{23} = 112$
Como o problema é de minimização, a solução não é ótima e as candidatas à variável entrante são x_{12}, x_{13} e x_{23}.
Como x_{12} tem o maior coeficiente ela é a variável "entrante".

Escolha da variável sainte:

	1	2	3	4	Disp.
1	6	$\boxed{+}$			6
2		1			1
3	1	4	3	2	10
Nec.	7	5	3	2	

O + na cela (1,2) indica que a variável x_{12} (entrante) vai sair de não básica (=0) para básica onde ela vai ser maior que zero (vamos esquecer, por ora, que ela pode ser básica degenerada, ou seja também igual a zero). Considerando então que ela vai ser maior que zero, para que a soma da 1ª linha continue dando 6, temos que diminuir em uma das 3 outras celas da linha. No entanto, é impossível se diminuir qualquer valor das celas (1,3) e (1,4) pois isto faria com que as variáveis x_{13} e x_{14} se tornassem negativas. Logo a única variável que pode ser diminuída é x_{11}. Temos então:

	1	2	3	4	Disp.
1	6 $\boxed{-}$	$\boxed{+}$			6
2		1			1
3	1	4	3	2	10
Nec.	7	5	3	2	

No entanto se x_{11} vai diminuir de valor, para a soma da 1ª coluna continuar dando 7 temos que aumentar x_{21} ou x_{31}. Não podemos aumentar x_{21} pois teríamos uma 2ª variável entrante. Logo teremos que aumentar x_{31}. Temos então:

	1	2	3	4	Disp.
1	6 $\boxed{-}$	$\boxed{+}$			6
2		1			1
3	1 $\boxed{+}$	4	3	2	10
Nec.	7	5	3	2	

Como vamos aumentar x_{31}, para a 3ª linha continuar somando 10, teremos que diminuir uma das outras celas da 3ª linha. Se diminuirmos x_{34}, teríamos que aumentar uma das celas da 4ª coluna e isto faria com que tivéssemos uma 2ª variável entrante. O mesmo raciocínio se aplica para x_{33}. Logo a diminuição só pode acontecer em x_{32}. Temos então:

	1	2	3	4	Disp.
1	6 $\boxed{-}$	$\boxed{+}$			6
2		1			1
3	1 $\boxed{+}$	4 $\boxed{-}$	3	2	10
Nec.	7	5	3	2	

Pode-se observar que se formou um laço fechado de $+$ e $-$. Sempre se forma um laço fechado e se não é possível fechá-lo, é porque a resolução contém algum erro.
Neste ponto o objetivo é atribuir o maior valor possível para a variável entrante sem que, obviamente, nenhuma outra variável se torne negativa. Assim, as candidatas a variável sainte são x_{11} e x_{32} pois elas estão sendo diminuídas quando se aumenta a entrante. Quando a entrante (x_{12}) chega a 4, x_{32} chega a zero, logo ela é a variável sainte.
A nova solução básica passa a ser (4 é somado e subtraído no laço):

	1	2	3	4	Disp.
1	2	4			6
2		1			1
3	5		3	2	10
Nec.	7	5	3	2	

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x_{11} = 2 \\ x_{12} = 4 \\ x_{22} = 1 \\ x_{31} = 5 \\ x_{33} = 3 \\ x_{34} = 2 \end{array}\right\} \qquad \textbf{VNB}\left\{ \text{ as demais } = 0 \right\}$$

$$Z = 104$$

Para saber se esta solução é ótima não precisamos escrever todas as equações do modelo dual pois podemos usar o próprio quadro para fazer o teste.

	1	2	3	4	v_i
1	2 •	3 •	11	7	
2	1	0 •	6	1	
3	5 •	8	15 •	9 •	
w_j					

Atribuímos um valor (zero de preferência) a um dos v_i ou w_j. Para facilitar podemos escolher a linha com mais variáveis básicas (marcadas com $\bullet$).
Como a 3ª linha é que tem mais variáveis básicas, vamos fazer v_3 igual a zero. Assim para a variável básica x_{31} temos $v_3 + w_1 - C_{31} = 0$. Como $C_{31} = 5$, temos $W_1 = 5$. Para a variável básica x_{33} temos $v_3 + w_3 - C_{33} = 0$. Como $C_{33} = 15$, temos que $W_3 = 15$. Para x_{34}, onde $v_3 + w_4 - C_{34} = 0$, e $C_{34} = 9$, temos $W_4 = 9$. Temos até aqui:

	1	**2**	**3**	**4**	v_i
1	2 $\bullet$	3 $\bullet$	11	7	
2	1	0 $\bullet$	6	1	
3	5 $\bullet$	8	15 $\bullet$	9 $\bullet$	0
w_j	5		15	9	

Para a variável básica x_{11} temos $v_1 + w_1 - C_{11} = 0$. Como $w_1 = 5$ e $C_{11} = 2$, temos $v_1 = -3$. Para a variável x_{12} temos $v_1 + w_2 - C_{12} = 0$. Como $v_1 = -3$ e $C_{12} = 3$, temos $w_2 = 6$. Finalmente para x_{22} temos $v_2 + w_2 - C_{22} = 0$. Como $w_2 = 6$ e $C_{22} = 0$, temos $v_2 = -6$.
Temos então:

	1	**2**	**3**	**4**	v_i
1	2 $\bullet$	3 $\bullet$	11	7	-3
2	1	0 $\bullet$	6	1	-6
3	5 $\bullet$	8	15 $\bullet$	9 $\bullet$	0
w_j	5	6	15	9	

Tendo encontrado os valores dos v_i e w_j podemos usar a relação $v_i + w_j - c_{ij}$ para achar os coeficientes das variáveis não básicas (as não marcadas com $\bullet$) na equação de Z.
Assim, por exemplo, para x_{13} temos $v_1 + w_3 - C_{13}$ ou $-3 + 15 - 11 = 1$. Fazendo de forma semelhante para as demais variáveis não básicas, temos:

	1	2	3	4	v_i
1	2 •	3 •	11 1	7 -1	-3
2	1 -2	0 •	6 3	1 2	-6
3	5 •	8 -2	15 •	9 •	0
w_j	5	6	15	9	

As candidatas a variável entrante (coeficientes > 0) são x_{13}, x_{23} e x_{24}.
Como x_{23} tem o maior coeficiente ela é a escolhida.

Escolha da variável sainte:

	1	2	3	4	Disp.
1	2	4			6
2		1	$\boxed{+}$		1
3	5		3	2	10
Nec.	7	5	3	2	

Formando-se o laço fechado, chegamos a:

	1	2	3	4	Disp.
1	2 $\boxed{-}$	4 $\boxed{+}$			6
2		1 $\boxed{-}$	$\boxed{+}$		1
3	5 $\boxed{+}$		3 $\boxed{-}$	2	10
Nec.	7	5	3	2	

As candidatas a variável sainte são x_{33}, x_{11} e x_{22}.
Como x_{22} chega a zero primeiro (quando a entrante chega a 1) ela é a variável sainte.
A nova solução básica (somando-se e subtraindo-se 1 no laço) fica:

	1	2	3	4	Disp.
1	1	5			6
2			1		1
3	6		2	2	10
Nec.	7	5	3	2	

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x_{11}=1 \\ x_{12}=5 \\ x_{23}=1 \\ x_{31}=6 \\ x_{33}=2 \\ x_{34}=2 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{\text{ as demais }=0\right\}$$

$$Z=101$$

No teste para saber se esta solução é a ótima, vamos fazer $v_3 = 0$. Usando-se $v_i + w_j - C_{ij} = 0$ para as variáveis básicas, chegamos a:

	1	**2**	**3**	**4**	v_i
1	2 ●	3 ●	11	7	-3
2	1	0	6 ●	1	-9
3	5 ●	8	15 ●	9 ●	0
w_j	5	6	15	9	

Calculando-se $v_i + w_j - C_{ij}$ para as variáveis não básicas, temos:

	1	**2**	**3**	**4**	v_i
1	2 ●	3 ●	11 1	7 -1	-3
2	1 -5	0 -3	6 ●	1 -1	-9
3	5 ●	8 -2	15 ●	9 ●	0
w_j	5	6	15	9	

Como é a única que tem coeficiente maior que zero, x_{13} é a variável entrante.
Escolha da variável sainte:

	1	**2**	**3**	**4**	**Disp.**
1	**1** $\boxed{-}$	**5**	$\boxed{+}$		**6**
2			**1**		**1**
3	**6** $\boxed{+}$		**2** $\boxed{-}$	**2**	**10**
Nec.	**7**	**5**	**3**	**2**	

Como x_{11} chega a zero quando a entrante chega a 1, ela é a variável sainte.
A nova solução básica (somando-se e subtraindo-se 1 no laço) é:

	1	**2**	**3**	**4**	**Disp.**
1		**5**	**1**		**6**
2			**1**		**1**
3	**7**		**1**	**2**	**10**
Nec.	**7**	**5**	**3**	**2**	

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x_{12} = 5 \\ x_{13} = 1 \\ x_{23} = 1 \\ x_{31} = 7 \\ x_{33} = 1 \\ x_{34} = 2 \end{array}\right\} \quad \textbf{VNB}\left\{ \text{ as demais } = 0 \right\}$$

$$Z = 100$$

No teste para saber se a solução básica é ótima, vamos fazer $v_3 = 0$. Usando-se $v_i + w_j - C_{ij} = 0$ para as variáveis básicas, calculamos os demais v_i e w_j:

	1	**2**	**3**	**4**	v_i
1	2	3 •	11 •	7	-4
2	1	0	6 •	1	-9
3	5 •	8	15 •	9 •	0
w_j	5	7	15	9	

Calculando os coeficientes das variáveis não básicas na equação de Z (usando $v_i + w_j - C_{ij}$) chegamos a:

	1	**2**	**3**	**4**	v_i
1	2 -1	3 •	11 •	7 -2	-4
2	1 -5	0 -2	6 •	1 -1	-9
3	5 •	8 -1	15 •	9 •	0
w_j	5	7	15	9	

Como nenhum dos coeficientes é **maior que zero**, a solução atual é ótima. Logo:

$$\textbf{VB}\left\{\begin{array}{l} x^*_{12} = 5 \\ x^*_{13} = 1 \\ x^*_{23} = 1 \\ x^*_{31} = 7 \\ x^*_{33} = 1 \\ x^*_{34} = 2 \end{array}\right\} \qquad \textbf{VNB}\left\{ \text{as demais}^* = 0 \right\}$$

$$Z^* = 100$$

Caso algum dos coeficientes fosse igual a zero teríamos soluções ótimas alternativas (como obtê-las ?).

4.11 Soluções básicas degeneradas

Sendo na solução abaixo x_{24} a variável entrante, vamos escolher a variável sainte:

	1	**2**	**3**	**4**	**Disp.**
1		**5**	**1**		**6**
2			**1** $\boxed{-}$	$\boxed{+}$	**1**
3	**7**		**1** $\boxed{+}$	**1** $\boxed{-}$	**9**
Nec.	**7**	**5**	**3**	**1**	

As candidatas a variável sainte são x_{23} e x_{34}. Há no entanto um empate, ou seja, as duas chegam a zero no momento que a entrante chega a 1.

Neste caso a escolha é arbitrária e a não escolhida como sainte será uma variável básica degenerada.

Escolhendo x_{34} como a sainte temos a seguinte solução básica:

	1	2	3	4	Disp.
1		5	1		6
2			0	1	1
3	7		2		9
Nec.	7	5	3	1	

Como regra geral se temos um empate entre n candidatas a variável sainte, teremos $n-1$ variáveis básicas degeneradas.
Vamos supor agora que nesta solução básica, x_{22} seja a variável entrante. Temos o seguinte laço:

	1	2	3	4	Disp.
1		5 $\boxed{-}$	1 $\boxed{+}$		6
2		$\boxed{+}$	0 $\boxed{-}$	1	1
3	7		2		9
Nec.	7	5	3	1	

Como x_{23} é uma variável básica degenerada e já igual a zero, ela não pode ser diminuída pois ficaria negativa. Assim, ela será a variável sainte e a entrante será uma básica degenerada. A nova solução será:

	1	2	3	4	Disp.
1		5	1		6
2		0		1	1
3	7		2		9
Nec.	7	5	3	1	

O algorítimo deve prosseguir normalmente sendo a variável básica degenerada tratada como uma variável básica qualquer.

4.12 O Modelo da Baldeação

Exemplo:
Um determinado produto é produzido em 2 fábricas e é remetido para 3 armazéns. A capacidade de produção mensal das fábricas é de 100 e 200 unidades do produto respectivamente. Cada um dos armazéns necessita 100 unidades do produto por mês. O produto pode ser transportado de uma fábrica para um armazém passando por qualquer outra fábrica ou armazém intermediário. O custo de transportar cada unidade entre armazéns e fábricas está dado na tabela abaixo:

		Fábricas		**Armazéns**		
		1	**2**	**I**	**II**	**III**
Fábricas	**1**	**–**	**80**	**10**	**20**	**30**
	2	**10**	**–**	**20**	**50**	**40**
	I	**20**	**80**	**–**	**40**	**10**
Armazéns	**II**	**40**	**20**	**10**	**–**	**20**
	III	**60**	**70**	**80**	**20**	**–**

O objetivo é atender as necessidades dos armazéns com a produção das fábricas com o menor custo total de transporte.

4.13 Diferença entre Transporte e Baldeação

No modelo de transporte qualquer quantidade sai diretamente de uma fonte para um destino não podendo passar por nenhum ponto intermediário. No modelo de baldeação o transporte de uma determinada quantidade pode, eventualmente, passar por vários pontos intermediários no caminho entre uma fonte e um destino. Estes pontos intermediários podem ser outras fontes ou mesmo outros destinos. É óbvio que o objetivo continua sendo minimizar o custo total de transporte. Sendo assim, só vai ocorrer baldeação se isto for mais barato do que transportar diretamente.

4.14 Adaptação do modelo da baldeação ao algorítimo do transporte

	1	2	I	II	III	Disp.
1	0	80	10	20	30	**100+300**
2	10	0	20	50	40	**200+300**
I	20	30	0	40	10	**+300**
II	40	20	10	0	20	**+300**
III	60	70	80	20	0	**+300**
Nec.	**+300**	**+300**	**100+300**	**100+300**	**100+300**	

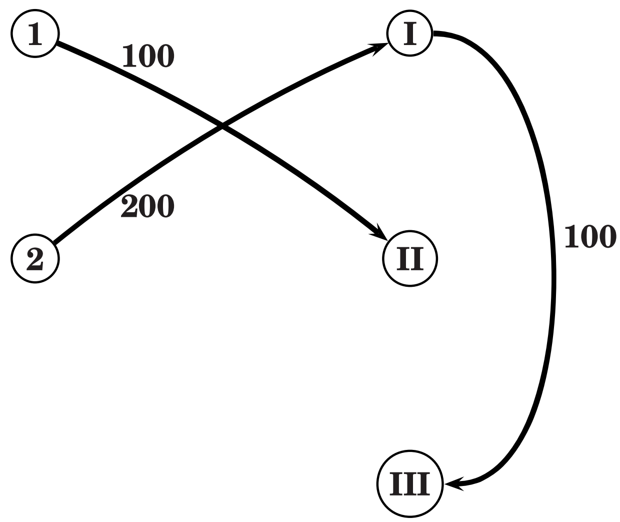
Como a solução ótima implica em que uma quantidade não passe 2 vezes pelo mesmo ponto, se somarmos a quantidade total envolvida (300 no exemplo) a cada fonte e a cada destino estaremos garantindo a praticabilidade da quantidade que sofre baldeação.

> Antes de somar esta quantidade se a produção das fábricas for maior que a necessidade dos armazéns, temos que criar um armazém artificial com a diferença entre o ($\sum$ disponibilidades $-\sum$ necessidades). Se for o inverso, criamos uma fábrica artificial.

Aplicando o algorítimo dos transportes no problema modificado chegaremos a seguinte solução ótima:

	1	2	I	II	III
1	300		0	100	
2		300	200		
I			200		100
II				300	
III					300

Eliminando os termos da diagonal pois não tem sentido físico, obtemos a solução ótima para o problema de baldeação:



$$Z^* = 100 \times 20 + 200 \times 20 + 100 \times 10 = 7.000$$

4.15 O Modelo da Atribuição ou da Designação

O chamado modelo da atribuição consiste na formulação e solução de problemas do tipo: Atribuir m tarefas à m máquinas de maneira que cada tarefa seja feita por apenas 1 máquina e uma máquina faça apenas uma tarefa, com o menor custo total.
Exemplo:
Quatro tarefas tem que ser atribuídas à 4 máquinas. O custo de atribuir cada tarefa à cada máquina está dado na tabela abaixo:

	Máquinas			
Tarefas	**I**	**II**	**III**	**IV**
1	10	9	8	7
2	3	4	5	6
3	2	1	1	2
4	4	3	5	6

Deseja-se escolher que máquina deve fazer que tarefa de maneira que o custo total seja mínimo.
Este problema pode ser resolvido como um modelo de transportes em que todas as disponibilidades e todas as necessidades são iguais a 1.

	Máquinas				
Tarefas	**I**	**II**	**III**	**IV**	**Disp.**
1	10	9	8	7	**1**
2	3	4	5	6	**1**
3	2	1	1	2	**1**
4	4	3	5	6	**1**
Nec.	**1**	**1**	**1**	**1**	

Cada solução básica terá 7 variáveis básicas e como qualquer variável x_{ij} (tarefa i atribuída à máquina j) só pode ser 0 ou 1, teremos sempre 3 variáveis básicas degeneradas.
Para resolver este tipo de problema foi desenvolvido um algorítimo bem mais rápido que o de transportes. Este algorítimo é conhecido como “Algorítimo Húngaro”.

4.16 Passos do Algorítimo

a) Subtraia o menor custo de cada linha de cada um dos custos da linha, obtendo uma nova matriz de custos.

b) Tente fazer a atribuição nos custos iguais a zero.

c) Se não foi possível fazer todas as atribuições, subtraia o menor custo de cada coluna de cada custo da coluna, obtendo uma nova matriz de custos.

d) Tente fazer a atribuição nos custos iguais a zero.

e) Se não foi possível fazer todas as atribuições, risque todos os zeros com o menor número possível de linhas verticais e horizontais. O número de linhas deve ser igual ao número máximo de atribuições que se conseguiu fazer no passo anterior.

f) Subtraia de cada custo não riscado pelas linhas, o menor dos custos não riscados.

g) Some este menor custo dos não riscados às intersecções das linhas traçadas no passo e.

h) Voltar ao passo d.

Vejamos então a aplicação do algorítimo ao nosso problema:

	Máquinas			
Tarefas	**I**	**II**	**III**	**IV**
1	10	9	8	7
2	3	4	5	6
3	2	1	1	2
4	4	3	5	6

Passo a: Subtrair, em cada linha, o menor custo da linha de todos os outros custos da linha.
Temos então:

	I	**II**	**III**	**IV**
1	3	2	1	0
2	0	1	2	3
3	1	0	0	1
4	1	0	2	3

Passo b: Tentar fazer a atribuição nos custos iguais a **0**.

	I	**II**	**III**	**IV**
1	3	2	1	$\boxed{0}$
2	$\boxed{0}$	1	2	3
3	1	0	$\boxed{0}$	1
4	1	$\boxed{0}$	2	3

Como foi possível fazer a atribuição (um para um) nos custos iguais a zero, encontramos a solução ótima:

Tarefa	Máquina	Custo
1	IV	7
2	I	3
3	III	1
4	II	3
		$Z^* = 14$

Exemplo 2:
Quatro tarefas tem que ser atribuídas a 4 máquinas. O custo de atribuir cada tarefa a cada máquina está dado abaixo:

	Máquinas			
Tarefas	**I**	**II**	**III**	**IV**
1	10	9	7	8
2	5	8	7	7
3	5	4	6	5
4	2	3	4	5

Vamos aplicar o algorítimo:
Passo a: Subtrair, em cada linha, o menor custo da linha de todos os outros custos da linha.
Temos então:

	I	**II**	**III**	**IV**
1	3	2	0	1
2	0	3	2	2
3	1	0	2	1
4	0	1	2	3

Passo b: Tentar fazer a atribuição nos custos iguais a **0**.
Temos então:

	I	**II**	**III**	**IV**
1	3	2	$\boxed{0}$	1
2	$\boxed{0}$	3	2	2
3	1	$\boxed{0}$	2	1
4	0	1	2	3

Como não conseguimos fazer as 4 atribuições, vamos para o passo seguinte.
Passo c: Subtrair, em cada coluna, de cada custo da coluna o menor custo da

coluna.
Temos então:

	I	**II**	**III**	**IV**
1	3	2	0	0
2	0	3	2	1
3	1	0	2	0
4	0	1	2	2

Passo d: Tentar fazer a atribuição nos custos iguais a zero. Temos:

	I	**II**	**III**	**IV**
1	3	2	$\boxed{0}$	0
2	$\boxed{0}$	3	2	1
3	1	$\boxed{0}$	2	0
4	0	1	2	2

No máximo, só conseguimos fazer **3** atribuições.
Passo e: Riscar todos os zeros, com linhas verticais e horizontais. O número de linhas tem que ser igual ao número máximo de atribuições que se fez no passo **d** (3 no nosso caso). Temos então:

	~~**I**~~	**II**	**III**	**IV**
~~**1**~~	~~3~~	~~2~~	~~0~~	~~0~~
2	~~0~~	3	2	1
~~**3**~~	~~1~~	~~0~~	~~2~~	~~0~~
4	~~0~~	1	2	2

A matriz possui agora 2 tipos de custos: riscados pelas linhas e não riscados.
Passos f e g: Subtrair o menor dos custos não riscados de todos os não riscados e somar este menor não riscado as intersecções das linhas traçadas.
Obs. Os custos riscados que não estão nas intersecções, se mantém inalterados.
Temos então:

	I	II	III	IV
1	4	2	0	0
2	0	2	1	0
3	2	0	2	0
4	0	0	1	1

Voltamos ao **Passo d:** Tentar fazer a atribuição nos custos iguais a zero. Temos então:

	I	II	III	IV
1	4	2	$\boxed{0}$	0
2	0	2	1	$\boxed{0}$
3	2	$\boxed{0}$	2	0
4	$\boxed{0}$	0	1	1

Achamos uma Solução ótima:

Tarefa	Máquina	Custo
1	III	7
2	IV	7
3	II	4
4	I	2
		$Z^* = 20$

Temos outra solução ótima:

	I	II	III	IV
1	4	2	$\boxed{0}$	0
2	$\boxed{0}$	2	1	0
3	2	0	2	$\boxed{0}$
4	0	$\boxed{0}$	1	1

Tarefa	Máquina	Custo
1	III	7
2	I	5
3	IV	5
4	II	3
		$Z^* = 20$

4.17 Impossibilidade de atribuição

Temos 4 máquinas para serem atribuídas para 4 tarefas. O custo de atribuir cada tarefa a cada máquina está dado na tabela a seguir:

Tarefas	Máquinas I	II	III	IV
1	10	9	–	8
2	5	8	7	7
3	5	4	6	5
4	–	3	4	5

Por razões técnicas, a tarefa 1 não pode ser feita pela máquina III e a máquina I não pode fazer a tarefa 4.
Este é o caso em que temos que garantir que, na solução ótima, tanto $x_{1,III}$ quanto $x_{4,I}$ sejam iguais a zero. Para forçar esta situação vamos atribuir, da mesma forma que fizemos no algorítimo dos transportes, um custo muito alto a estas variáveis. Este custo, que chamamos de **M**, representa um valor tão grande quanto se queira imaginar. Assim teríamos:

Tarefas	Máquinas I	II	III	IV
1	10	9	**M**	8
2	5	8	7	7
3	5	4	6	5
4	**M**	3	4	5

Na resolução manual do algorítimo, o **M** tem que ser considerado como um número muito grande.

4.18 Fontes ou destinos artificiais

A aplicação do algorítimo húngaro deve ser feita sempre em uma **matriz quadrada**. Assim se o nº de tarefas é maior que o nº de máquinas devemos criar tantas máquinas artificiais quantas sejam necessárias para tornar a matriz quadrada. **O custo de atribuir uma tarefa à uma máquina artificial é zero.**
Se o número de máquinas é que for maior, criamos tarefas artificiais.
Como exemplo, vamos supor que temos 4 tarefas para serem atribuídas a 6 máquinas. O custo de atribuir cada tarefa a cada máquina está dado na tabela a seguir:

Tarefas	Máquinas I	II	III	IV	V	VI
1	10	9	6	8	9	10
2	5	8	7	7	4	8
3	5	4	6	5	11	8
4	10	3	4	5	7	9

Para aplicarmos o algorítimo, temos que criar 2 tarefas artificiais, com custos iguais a zero:

Tarefas	Máquinas I	II	III	IV	V	VI
1	10	9	6	8	9	10
2	5	8	7	7	4	8
3	5	4	6	5	11	8
4	10	3	4	5	7	9
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Aplica-se então normalmente o algorítimo húngaro (deixado como exercício).
Na solução ótima, as tarefas 5 e 6 (artificiais) são atribuídas às máquinas IV e VI.
Logo estas 2 máquinas ficarão sem tarefa para fazer.
No exemplo acima, se tivéssemos mais tarefas do que máquinas, criaríamos máquinas artificiais.

4.19 Exercícios

A) Uma empresa tem 3 fábricas produzindo um certo produto que deve ser remetido para 4 centros de distribuição. As fábricas 1, 2 e 3 produzem 12, 17 e 11 unidades do produto, por mês, respectivamente. Cada centro de distribuição necessita receber 10 unidades por mês. A distancia de cada fábrica para cada um dos centros de distribuição é mostrado abaixo (em kms) :

	Centro de Distribuição			
Fábricas	1	2	3	4
1	800	1300	400	700
2	1100	1400	600	1000
3	600	1200	800	900

O custo de transporte é igual a $0.50/km por unidade transportada.
Quanto deveria ser enviado de cada fábrica para cada armazém de maneira que o custo total seja mínimo ?
Formule e resolva este problema como um modelo de Transportes.

B) Uma empresa decidiu produzir 3 novos produtos em 5 de suas fábricas. O custo unitário de produção do produto 1 é $31, $29, $32, $28 e $29 nas fábricas 1, 2, 3, 4 e 5 respectivamente. Para o produto 2 é $45, $41, $46, $42 e $43 nas fábricas 1, 2, 3, 4 e 5 respectivamente. Para o produto 3 é $38, $35, $40 nas fábricas 1, 2 e 3 respectivamente, enquanto que as fábricas 4 e 5 não tem capacidade de produzir este produto. As previsões de vendas indicam que 1500, 2500 e 2000 unidades dos produtos 1, 2 e 3 respectivamente devem ser produzidas. As fábricas 1,2,3,4 e 5 tem capacidade de produzir 2000, 1000, 2000, 1500 e 2500 unidades diárias respectivamente, sejam quais forem os produtos ou combinações deles envolvidos.
A empresa deseja minimizar o custo total de produção.
Resolva este problema como um modelo de Transportes.

C) Suponha que a Inglaterra, França e Espanha produzam todo o trigo, cevada e aveia do mundo. A demanda mundial de trigo requer 125 milhões de acres plantados com trigo. Da mesma forma 60 milhões de acres são necessários para a cevada e 75 milhões de acres para a aveia. A quantidade total de terra disponível para este propósito na Inglaterra, França e Espanha são 70 milhões, 110 milhões e 80 milhões de acres, respectivamente.
O número de horas de trabalho necessárias na Inglaterra, França e Espanha para plantar 1 acre de trigo são 18, 13 e 16 horas respectivamente.
O número de horas de trabalho necessárias na Inglaterra, França e Espanha para plantar 1 acre de cevada são 15, 12 e 12 horas respectivamente.
Para a aveia o número de horas necessárias são 12, 10 e 16 respectivamente.
O custo do trabalho por hora para cada tipo de cultura é mostrado a seguir:

	Inglaterra	França	Espanha
Trigo	3	2	3
Cevada	3	3	3
Aveia	2	3	2

Qual deve ser o uso da terra em cada país de maneira que a demanda mundial por estes 3 alimentos seja satisfeita e que o custo seja mínimo ?
Resolva este problema como um modelo de Transportes.

D) Uma firma que produz um único produto tem 3 fábricas e 4 fregueses. As 3 fábricas produzirão 3000, 5000 e 4000 unidades, respectivamente, durante o próximo mês. A firma tem uma obrigação contratual de vender 4000 unidades ao freguês 1, 3000 unidades ao freguês 2 e no mínimo 1000 unidades ao freguês 3. Os fregueses 3 e 4 estão dispostos a comprarem o máximo que puderem.
O lucro líquido associado com a venda de 1 unidade da fábrica i para o freguês j é mostrado abaixo:

	Freguês			
Fábrica	1	2	3	4
1	65	63	62	64
2	68	67	65	62
3	63	60	59	60

A diretoria deseja saber quantas unidades deve vender aos fregueses 3 e 4 e quantas unidades devem ir de cada fábrica para cada freguês de maneira a maximizar o lucro.
Resolva este problema como um modelo de Transportes.

E) Considere o problema de transportes tendo a seguinte matriz de custos:

	Destinos				
Fontes	1	2	3	4	Disponibilidades
1	3	7	6	4	5
2	2	4	3	2	2
3	4	3	8	5	3
Necessidades	3	3	2	2	

Qual a solução ótima ?

F) Considere o problema de transportes tendo a seguinte matriz de custos:

	Destinos					
Fontes	1	2	3	4	5	Disponibilidades
1	8	6	3	7	5	20
2	5	M	8	4	7	30
3	6	3	9	6	8	30
4	0	0	0	0	0	20
Necessidades	25	25	20	10	20	

Qual a solução ótima ?

G) Considere o problema de transportes tendo a seguinte matriz de custos:

	Destinos						
Fontes	1	2	3	4	5	6	Disponibilidades
1	10	18	29	13	22	0	100
2	13	M	21	14	16	0	120
3	0	6	11	3	M	0	140
4	9	11	23	18	19	0	80
5	24	28	36	30	34	0	60
Necessidades	100	120	100	60	80	40	

Qual a solução ótima ?

H) O custo ($) de carga aérea, por tonelada, entre 7 cidades é dado pela tabela abaixo ("–" significa que não existe serviço direto de carga aérea):

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	21	50	62	93	77	–
2	21	0	17	54	67	–	48
3	50	17	0	60	98	67	25
4	62	54	60	0	27	–	38
5	93	67	98	27	0	47	42
6	77	–	67	–	47	0	35
7	–	48	25	38	42	35	0

Uma empresa deseja enviar carga das cidades 1, 2 e 3 para as cidades 4, 5, 6 e 7. Das cidades 1, 2 e 3 sairão 70, 80 e 50 toneladas respectivamente.
As cidades 4, 5, 6 e 7 deverão receber 30, 60, 50 e 60 toneladas respectivamente.
O transporte pode passar por qualquer cidade intermediária a um custo igual a soma dos custos de cada trecho percorrido.
O objetivo é minimizar o custo de transporte da carga.
Resolva este problema como um modelo de Baldeação

I) Uma estudante tendo entrado para a universidade, resolveu comprar um carro para usá-lo nos próximos 4 anos. Como o dinheiro disponível é bastante limitado, ela deseja minimizar os seus gastos com o carro. Levando em conta o preço inicial de compra e o custo de manutenção, não está claro para ela se deve comprar um carro muito velho ou semi-novo. Também não está claro se ela deve trocar de carro pelo menos uma vez nos próximos 4 anos, antes que os custos de manutenção se tornem demasiados caros.

	Preço de Compra	Custo de Manutenção/ano				Preço de venda no final do ano			
		1	2	3	4	1	2	3	4
Carro muito velho	250	475	550	625	700	150	100	50	0
Carro semi-novo	950	250	325	425	575	550	400	300	250

Se a estudante trocar de carro nos próximos 4 anos, ela poderá fazê-lo no fim de um dos anos por outro carro idêntico a um dos 2 tipos acima.
É certo que no fim dos 4 anos ela comprará um carro novo.
A estudante deseja minimizar os seus gastos nos próximos 4 anos.
Resolva este problema como um modelo de baldeação.

J) Considere o problema de transporte onde 2 fábricas fornecem um determinado produto para 3 armazéns. O número de unidades disponíveis em cada fábrica são 200 e 300 unidades respectivamente. As necessidades de cada armazém são 100, 200 e 50 unidades respectivamente.
Em vez de se enviar o produto diretamente está se estudando a possibilidade de fazer baldeação.
Os custos de transporte são:

	Fábrica 1	Fábrica 2	Armazém I	Armazém II	Armazém III
Fábrica 1	0	6	7	8	9
2	6	0	5	4	3
I	7	2	0	5	1
Armazém II	1	5	1	0	4
III	8	9	7	6	0

Qual a solução ótima ?

K) Resolva o seguinte problema de atribuição:

	1	2	3	4	5
I	3	8	2	10	3
II	8	7	2	9	7
III	6	4	2	7	5
IV	8	4	2	3	5
V	9	10	6	9	10

L) Resolva o seguinte problema de atribuição:

	1	2	3	4	5
I	3	9	2	3	7
II	6	1	5	6	6
III	9	4	7	10	3
IV	2	5	4	2	1
V	9	6	2	4	6

M) Considere o problema de atribuir 4 operadores para 4 máquinas. Os custos de atribuição estão dados abaixo:

Operador	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3	Máquina 4
1	5	5	–	2
2	7	4	2	3
3	9	3	5	–
4	7	2	6	7

O operador 1 não pode operar a máquina 3 e o 3 não pode operar a máquina 4. Qual a atribuição ótima ?

N) Suponha que no exemplo anterior uma 5ª máquina está disponível. Seus custos de atribuição para os 4 operadores são 2, 1, 2 e 8 respectivamente. A nova máquina substituirá uma das existentes se isto puder ser justificado economicamente.
Reformule o problema e resolva.

O) Um treinador de uma equipe de natação tem que formar um time para nadar no revezamento 4x100 (4 estilos) na próxima etapa do campeonato.
Os 5 melhores nadadores da equipe e os seus respectivos tempos (em segundos) em cada um dos estilos é mostrado abaixo:

	Nadador				
Estilo	Carlos	Celso	Artur	Antonio	Flávio
I	37.7	32.9	33.8	37.0	35.4
II	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
III	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
IV	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

Como deve ser formado o time ?

P) Um certo produto é transportado de 3 fábricas para 4 armazéns. A matriz de custos assim como a disponibilidade de cada fábrica e a necessidade de cada armazém estão mostrados abaixo:

	Armazém				
Fábrica	1	2	3	4	Disp.
I	1.0	7.5	8.5	11.0	40000
II	7.5	4.5	3.0	7.5	50000
III	10.0	6.5	1.0	6.0	35000
Necessidades	35000	20000	25000	45000	

Qual a solução ótima ?

Q) Temos 5 máquinas para serem atribuídas a 6 operadores. Os custos de atribuir cada máquina à cada operador estão dados abaixo:

	Operadores					
Máquinas	1	2	3	4	5	6
I	12	14	9	13	10	16
II	11	13	15	17	13	11
III	9	15	9	14	12	13
IV	10	12	11	13	14	14
V	13	10	15	10	16	15

Qual deve ser a atribuição de maneira que o custo seja mínimo ?

4.20 Respostas dos exercícios da seção 4.19

Exercício A
Fáb. 1 para Centro 3 = 2
Fáb. 1 para Centro 4 = 10
Fáb. 2 para Centro 2 = 9 Z = 16.200
Fáb. 2 para Centro 3 = 8
Fáb. 3 para Centro 1 = 10
Fáb. 3 para Centro 2 = 1

Exercício B
Fáb. 1 → 1.000 do Prod.3
Fáb. 2 → 1.000 do Prod.3 Z = 222.500
Fáb. 4 → 1.500 do Prod.1
Fáb. 5 → 2.500 do Prod.2

Exercício C
Inglaterra → 70 de aveia
França → 110 de trigo
Espanha → 15 de trigo, 60 de cevada e 5 de aveia
$Z = 7480$

Exercício D
Introduza o freguês 3# que receberá as unidades extras enviadas para o freguês 3, além do nível mínimo de 1.000.
Introduza a fábrica D, que "venderá" as unidades extras para os fregueses 3 e 4.

	Freguês					
Fábrica	1	2	3	4	3#	
1	-65	-63	-62	-64	-62	3000
2	-68	-67	-65	-62	-65	5000
3	-63	-60	-59	-60	-59	4000
D	M	M	0	0	0	4000
	4000	3000	1000	4000	4000	

Solução ótima:

Fábrica	Freguês		
1	4	3.000	
2	1	1.000	
2	2	3.000	$Z = 775000$
2	3	1.000	
3	4	1.000	
3	1	3.000	

Exercício E

Fonte	Destino		
1	4	2	
1	1	3	$Z = 32$
2	3	2	
3	2	3	

Exercício F

Fonte	Destino		
1	3	20	
2	1	20	
2	4	10	$Z = 305$
3	1	5	
3	2	25	
4	5	20	

Exercício G

Fonte	Destino		
1	1	100	
2	3	40	
2	5	80	
3	2	20	$Z = 5520$
3	3	60	
3	4	60	
4	2	80	
5	2	20	
5	6	40	

Exercício H

Fonte	Destino	
1	4	20
1	6	50
2	4	10
2	5	60
2	3	10
3	7	60

Exercício I

Façamos C_{ij}^k ser o custo de comprar um carro velho $(k = 1)$ ou um carro semi-novo $(k = 2)$ no inicio do ano i revendendo no final do ano j.
C_{ij} = Preço de Compra + Custos de Operação e manutenção para os anos $1, 2, \ldots, j - i + 1 -$ Valor de Revenda após $j - i + 1$ anos.
$C_{ij} = \text{MIN}\ (C_{ij}^1 + C_{ij}^2)$

Façamos o ano 1 ser a fonte com disponibilidade de 1.
Façamos o ano 5 ser o destino com necessidade de 1.
Façamos os anos 2, 3 e 4 serem os pontos de baldeação.

	1	2	3	4	5	Disp.
1	0	575	1125	1650	2275	1
2	M	0	55	1125	1650	0
3	M	M	0	575	1125	0
4	M	M	M	0	575	0
5	M	M	M	M	0	0
Necessidade	0	0	0	0	1	

Resolvendo-se verifica-se que o ótimo é comprar um carro velho inicialmente. Após 1 ano de uso, comprar um carro semi-novo e usá-lo durante os 3 anos seguintes.

Exercício J

$1 \rightarrow 1 \Rightarrow 50$
$2 \rightarrow 1 \Rightarrow 50$
$2 \rightarrow 2 \Rightarrow 200$
$2 \rightarrow 3 \Rightarrow 50$
$Z = 1550$

Exercício K

$1 \rightarrow 5$
$2 \rightarrow 3$
$3 \rightarrow 2$
$4 \rightarrow 4$
$5 \rightarrow 1$
$Z = 21$

Exercício L

$1 \rightarrow 1$
$2 \rightarrow 2$
$3 \rightarrow 5$
$4 \rightarrow 4$
$5 \rightarrow 3$
$Z = 11$

Exercício M

$1 \rightarrow 4$
$2 \rightarrow 3$
$3 \rightarrow 2$
$4 \rightarrow 1$
$Z = 14$

Exercício N

A máquina 5 substitui a máquina 1.
$Z = 8$

Exercício O
Estilo 1: Artur
Estilo 2: Antonio
Estilo 3: Celso
Estilo 4: Carlos

Exercício P

Fábrica	Armazém		
I	1	35.000	
III	3	25.000	
I	2	5.000	$Z = 487500$
II	2	15.000	
II	4	35.000	
III	4	10.000	

Exercício Q
I $\rightarrow$ 5
III $\rightarrow$ 3
V $\rightarrow$ 2
II $\rightarrow$ 6
IV $\rightarrow$ 1

5

Bibliografia de Pesquisa Operacional

A bibliografia a seguir apresentada, é uma relação de livros de P.Operacional e/ou de tópicos específicos de P.Operacional, existentes no mercado nacional e internacional.
As seguintes observações devem ser levadas em conta:

a) Muitos dos livros estrangeiros desta relação não são encontrados nas livrarias do Brasil e, se desejados, tem que ser encomendados. Alguns são encontrados em bibliotecas.

b) Como o mercado internacional é bastante ativo, é possível que um livro seja encontrado no Brasil na sua 3ª edição, por exemplo, e ele já tenha uma ou mais edições no exterior. Normalmente uma nova edição é maior e melhor que a anterior.

c) Alguns livros, tanto estrangeiros como nacionais, constantes da relação estão esgotados e só são encontrados em bibliotecas.

d) Os livros em português que são tradução de livros estrangeiros estão, quase sempre, defasados em relação a última edição da obra.

1. **Introdução à Pesquisa Operacional - 8ª Edição**
   ● Hillier & Lieberman
   – McGraw Hill

2. **Pesquisa Operacional**
   ● Wagner, Harvey M.
   – Prentice – Hall do Brasil

3. **Pesquisa Operacional Vol. I,II e III**
   ● Victor Mirshawka
   – Nobel

4. **Pesquisa Operacional – Uma abordagem básica**
   ● Shamblin e Stevens
   – Atlas

5. **Pesquisa Operacional**
● Ackoff e Sasieni
– Livros Técnicos e Científicos

6. **Pesquisa Operacional**
● Ellenrieder
– Almeida Neves

7. **Pesquisa Operacional**
● Richard Bronson
– McGraw-Hill – Coleção Schaum

8. **Introdução à Pesquisa Operacional**
● Eduardo Leopoldino de Andrade
– Livros Técnicos e Científicos

9. **Pesquisa Operacional**
● Ermes Medeiros, Elio Medeiros, Valter Gonçalves, Afrânio Murolo
– Atlas

10. **Programação Linear**
● Puccini & Pizolato
– Livros Técnicos e Científicos

11. **Programação Linear**
● Fritzsche
– Edgar Bucher

12. **Métodos de Otimização – Aplicação aos Transportes**
● Novaes
– Edgar Blucher

13. **Metodos y Modelos de Investigacion de Operaciones Vol. I e II**
● Prawda
– Limusa

14. **Metodos y Modelos de Investigacion de Operaciones Vol. I,II e III**
● Kaufmann
– CECSA

15. **Operations Research – An Introduction**
● Hamdy A. Taha
– MacMillan

16. **Principles of Operations Research for Management**
● Budnick, Mojena, Volmann
– Irwin

17. **Introduction to Quantitative Methods**
    - Verma, Gross
    – Wiley – Hamilton

18. **Operations Research – Principles and Practice**
    - Phillips, Ravindran, Solberg
    – Wiley

19. **Introduction to Operations Research**
    - Gillett
    – McGraw Hill

20. **System Analysis for Managerial Decisions**
    - Ramalingam
    – Wiley

21. **Quantitative Methods for Managerial Decisions**
    - Brown, Revelle
    – Addison – Wesley

22. **Quantitative Methods for Business Decisions**
    - Lappin
    – Harcourt – Brace – Jovanovich

23. **Industrial Operations Research**
    - Fabrick, Ghare, Torgensen
    – Prentice – Hall

24. **Management – A Quantitative Perspective**
    - Lomba
    – MacMillan

25. **Quantitative Techniques for Business Decisions**
    - Johnson, Siskin
    – Prentice – Hall

26. **Quantitative Analysis for Managerial Decisions**
    - Kim
    – Addison – Wesley

27. **Applied Operations Research**
    - Whitehouse, Wechsler
    – Wiley

28. **Decision Making Through Operations Research**
    - Thierauf, Klekamp
    – Wiley

29. **Operations Research – A Managerial Emphasis**
● Hartley
– Goodyear

30. **Topics in Management Science**
● Markland
– Wiley

31. **Operations Research Tecnhiques for Management**
● Moskowitz, Wright
– Prentice – Hall

32. **Quantitative Decision – Making for Business**
● Gordon, Pressman
– Prentice – Hall

33. **Essentials of Management Science – Operations Research**
● Buffa, Dyer
- Wiley

34. **Operations Research – Applications and Algorithms**
● Winston, Wayne L.
– Duxbury Press

35. **Management Science**
● Camm, Jeffrey D. & Evans, James R.
– South–Western College Publishing

36. **Practical Management Science**
● Winston, Wayne L. & Albright, S. Christian
– Duxbury Press

37. **Linear Programming**
● Lomba
– MacMillan

38. **Mathematical Programming**
● Mcmillan
– Wiley

39. **Applied Mathematical Programming**
● Bradley, Hax, Magnanti
– Addison – Wesley

40. **Linear Programming**
● Hadley
– Addison – Wesley

41. **Introduction to Linear and Nonlinear Programming**
● Luenberger
– Addison – Wesley

42. **Linear Programming and Network Flows**
● Bazaraa, Jarvis
– Wiley

43. **Matrices and Linear Programming**
● Munakata
– Holden – Day

44. **Applied Nonlinear Programming**
● Himmeblau
– McGraw – Hill

45. **Nonlinear Programming**
● Bazaraa, Shetty
– Wiley

46. **Linear Programming and Extensions**
● Dantzig
– Princeton

47. **Linear Programming**
● Gass
– McGraw – Hill

48. **Basic Linear Programming**
● Brian D. Bunday
– Edward Arnold Ltd.

49. **Basic Optimisation Methods**
● Brian D. Bunday
– Edward Arnold Ltd.

50. **An Introduction to Linear Programming and Game Theory**
● Paul R. Thie
– John Wiley & Sons

51. **Linear Programming**
● Ignizio & Cavalier
– Prentice – Hall

52. **Linear Programming**
● Chvátal, Vasek
– W.H.Freeman and Company

53. **Elementary Linear Programming With Applications**
● Kolman Bernard & Beck, Robert E.
– Academic Press

54. **Optimization Modeling Programming**
● Schrage, Linus
– Duxbury Press

55. **Optimization in Operations Research**
● Rardin, Ronald L.
– Prentice – Hall

56. **Linear Programming**
● Dantzig, George B. & Thapa, Mukund N.
– W.H.Freeman and Company